This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

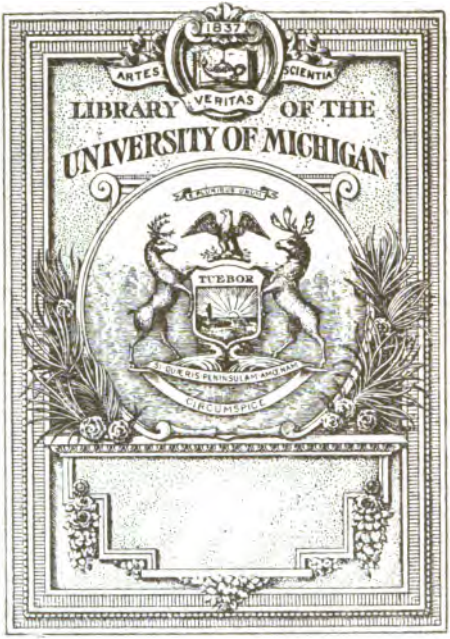
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

Mathematics
QA
931
.M32

3969 Alexander Ziwet 2·9

MANUALI HOEPLI

TEORIA MATEMATICA

DELLO

EQUILIBRIO DEI CORPI ELASTICI

DI

ROBERTO MARCOLONGO

PROF. ORDINARIO NELLA R. UNIVERSITÀ DI MESSINA.

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO

MILANO

1904.

PROPRIETÀ LETTERARIA.

Milano, Tip. Rebeschini di Turati e C.

A

VALENTINO CERRUTI

CON AFFETTO DI DISCEPOLO

DEDICO.

BEQUEST OF
PROF. ALEXANDER ZIWET.
Math
6-24-1932

PREFAZIONE

Il manuale, che per cura del solerte editore Hoepli vede ora la luce, sviluppa un corso di lezioni di Fisica matematica dettate nella Università di Messina; ma la trattazione è condotta in guisa da essere accessibile, con poca fatica e senza un corredo troppo esteso di cognizioni di Analisi, agli studenti delle Scuole d'Applicazione; ai quali ogni giorno di più s'impone la conoscenza dei fondamenti della teoria matematica dell'Elasticità.

Perciò ho creduto opportuno premettere un capitolo sulla teoria delle funzioni armoniche e poliarmoniche, in cui sviluppo quei lemmi di Analisi che più frequentemente occorrono in tutto il corso; un altro sulla teoria fondamentale delle funzioni potenziali newtoniane e finalmente un terzo sui principii della Meccanica dei corpi continui; benchè questa parte sia esposta, e con maggior ampiezza, in quasi tutti i nostri corsi di Meccanica Razionale.

I limiti imposti al manuale hanno permesso soltanto di sviluppare le questioni relative all'equilibrio dei corpi elastici a tre dimensioni, tralasciando ancora quelle che richiedevano o sviluppi troppo lunghi o conoscenze troppo elevate di Analisi.

Credo tuttavia aver accennato, pur fugacemente, le cose più notevoli; dai metodi classici d'integrazione di Betti-Cerruti, ai più recenti lavori, specialmente italiani; dalle ricerche di Navier, Cauchy a quelle del prof. Voigt, così capitali e per la teoria della costituzione della materia e per la determinazione delle costanti elastiche dei cristalli.

Il lettore desideroso di più estesi particolari dovrà ricorrere ad altri e più completi trattati e specialmente a quelli del prof. Love e del prof. Cesàro, che mi riuscirono preziosi nella compilazione del presente manuale; e alle memorie originali di cui ho data un'ampia, se non completa, bibliografia.

Le poche note storiche del testo possono dare appena un'idea dello sviluppo storico della teoria matematica della Elasticità; nè del resto sarebbe stata opportuna una maggior larghezza di particolari dopo quanto scrisse il Love nella introduzione del suo libro e dopo la particolareggiata storia del Todhunter e Pearson *.

Mi auguro che gli studiosi vorranno accogliere con benevolenza questo mio tentativo, per quanto

---

* *A History of the Theory of Elasticity.* Cambridge, 1886.

imperfetto; e il cui scopo è di facilitare la via a studî più completi, mostrando in una breve e rapida esposizione ciò che di più importante è stato prodotto in questa tra le più notevoli teorie di Fisica matematica.

Messina, novembre 1903.

ROBERTO MARCOLONGO.

INDICE

CAPITOLO PRIMO.

Le funzioni armoniche e poliarmoniche ed i teoremi di Green.

§ 1. Funzioni armoniche e poliarmoniche . . . Pag. 1
§ 2. Esempi di funzioni poliarmoniche . . . . „ 4
§ 3. Derivata di direzione . . . . . „ 7
§ 4. Angolo visuale di una curva piana o di una superficie . . . . . „ 8
§ 5. Lemmi di Gauss . . . . . „ 11
§ 6. Lemmi di Green . . . . . „ 15
§ 7. Teoremi di Green . . . . . „ 18
§ 8. Condizioni che individuano le funzioni poliarmoniche . . . . . „ 23
§ 9. Funzioni di Green. Problema dei valori al contorno . . . . . „ 26
§ 10. Determinazione delle funzioni di Green in alcuni casi semplici . . . . . „ 30
§ 11. Risoluzione del problema dei valori al contorno per il cerchio (sfera) . . . . . „ 34
§ 12. Risoluzione del problema dei valori al contorno per un semipiano o semispazio infinito „ 40
§ 13. Di una trasformazione in sè stessa della equazione $\Delta_{2n}=0$ . . . . . „ 44

CAPITOLO SECONDO.

Le funzioni potenziali newtoniane.

§ 1. Funzione potenziale di una massa distribuita in uno spazio a tre dimensioni, attraente secondo la legge di Newton . . . . . Pag. 55
§ 2. Proprietà della funzione potenziale nello spazio esterno alla materia agente . . . . „ 56
§ 3. Proprietà della funzione potenziale nello spazio occupato dalla materia agente . . . „ 58
§ 4. Funzione potenziale di una sfera omogenea „ 61
§ 5. Derivate seconde della funzione potenziale. Formula di Poisson . . . . . „ 63
§ 6. Discontinuità delle derivate seconde . . . „ 67
§ 7. Caratteristiche della funzione potenziale. Teorema di Dirichlet . . . . . „ 70
§ 8. Funzione potenziale di un ellissoide omogeneo „ 73
§ 9. Funzione potenziale di uno strato semplice „ 81
§ 10. Caratteristiche della funzione potenziale di strato semplice. Discontinuità delle derivate prime . . . . . „ 81
§ 11. Funzione potenziale di doppio strato . . . „ 85
§ 12. Identità di Gauss. Teorema di reciprocità . „ 90
§ 13. Teorema della media di Gauss . . . . . „ 92
§ 14. Teoremi sulla funzione potenziale all'esterno delle masse agenti . . . . . „ 94

CAPITOLO TERZO.

Principii della meccanica dei corpi continui.

§ 1. Deformazione di una particella . . . . . Pag. 97
§ 2. Deformazione infinitesima . . . . . „ 102
§ 3. Coefficiente di dilatazione di una retta; scorrimento mutuo di due rette. Componenti di deformazione . . . . . „ 102

§ 4. Analisi della deformazione . . . . . Pag. 108
§ 5. Ricerca delle dilatazioni principali. Invarianti di deformazione . . . . . „ 112
§ 6. Relazioni fra le componenti di deformazione „ 117
§ 7. Formule di trasformazione . . . . . „ 119
§ 8. Pressioni interne in un corpo continuo . . „ 122
§ 9. Componenti speciali di pressione. Teorema fondamentale di Cauchy . . . . . „ 124
§ 10. Equazioni indefinite per l'equilibrio di un corpo continuo . . . . . „ 128
§ 11. Componente normale di pressione. Ellissoide di Lamé e quadriche delle pressioni . . „ 130
§ 12. Elementi principali di pressione. Pressioni principali . . . . . „ 134

CAPITOLO QUARTO.

Le equazioni dell'equilibrio e del moto dei corpi elastici isotropi.

§ 1. Proprietà elastiche della materia. Legge sperimentale di Hooke . . . . . Pag. 137
§ 2. Corpi isotropi ed anisotropi. Moduli di elasticità . . . . . „ 138
§ 3. Relazioni tra pressioni e deformazione nei corpi isotropi . . . . . „ 142
§ 4. Potenziale di elasticità. . . . . „ 146
§ 5. Equazioni dell'equilibrio . . . . . „ 149

CAPITOLO QUINTO.

Le equazioni dell'elasticità per i corpi anisotropi.

§ 1. La teoria molecolare . . . . . Pag. 157
§ 2. Teoria delle azioni immediate. Potenziale di elasticità . . . . . „ 163
§ 3. Proprietà del potenziale di elasticità . . . „ 168

§ 4. Coefficienti e moduli di elasticità . . . . Pag. 170
§ 5. Formule per la trasformazione . . . . . „ 173
§ 6. Cenno sulla teoria molecolare del prof. Voigt „ 176
§ 7. Forme del potenziale di elasticità per i vari sistemi cristallini . . . . . „ 182
§ 8. Conclusioni del prof. Voigt . . . . . „ 193
§ 9. Equazioni di equilibrio ed univocità della soluzione delle stesse . . . . . „ 194
§ 10. Teorema di reciprocità del Betti . . . . . „ 198
Nota . . . . . „ 202

CAPITOLO SESTO.

Teoremi generali sulle equazioni dell'equilibrio dei corpi isotropi. Metodo d'integrazione del Betti.

§ 1. Espressioni degli spostamenti . . . . . Pag. 205
§ 2. Dilatazione cubica e componenti delle rotazioni . . . . . „ 214
§ 3. Espressioni degli spostamenti in funzione delle forze e degli spostamenti in superficie . „ 215
§ 4. Risoluzione del problema dell'equililbrio elastico, cogniti gli spostamenti in superficie „ 220
§ 5. Risoluzione del problema dell'equilibrio elastico, cognite le trazioni superficiali . . „ 224
§ 6. Risoluzione del problema dell'equilibrio in altri casi . . . . . „ 232
§ 7. Sulla eliminazione delle forze di massa . . „ 233
§ 8. Teorema del prof. Cerruti . . . . . „ 236
§ 9. Riassunto di alcune recenti ricerche sulle equazioni dell'elasticità . . . . . „ 237

CAPITOLO SETTIMO.

Il problema di Boussinesq e Cerruti,

§ 1. Posizione del problema . . . . . Pag. 245
§ 2. Risoluzione del primo problema . . . . . „ 245

§ 3. Risoluzione del secondo problema . . . . Pag. 253
§ 4. Risoluzione del terzo problema . . . . . „ 262
§ 5. Altra risoluzione dei problemi precedenti . „ 267

CAPITOLO OTTAVO.

La deformazione di una sfera isotropa.

§ 1. Deformazione di una sfera isotropa per dati spostamenti in superficie . . . . . Pag. 281
§ 2. Deformazione della sfera per date forze agenti in superficie . . . . . „ 288

CAPITOLO NONO.

Il problema di Saint-Venant sulla deformazione delle aste cilindriche.

§ 1. Posizione del problema . . . . . Pag. 293
§ 2. Ipotesi speciale sulle forze interne; problema di Saint-Venant . . . . . „ 296
§ 3. Equazioni diff. per gli spostamenti . . . . „ 299
§ 4. Ricerca degli spostamenti . . . . . „ 300
§ 5. Analisi della deformazione. Estensione semplice . . . . . „ 313
§ 6. Flessione uniforme . . . . . „ 314
§ 7. Flessione non uniforme . . . . . „ 317
§ 8. Flessione non uniforme di un cilindro ellittico „ 319
§ 9. Torsione . . . . . „ 322
§ 10. Torsione di un cilindro ellittico . . . . . „ 325

CAPITOLO DECIMO.

Deformazione delle piastre cilindriche o problema complementare di Saint-Venant.

§ 1. Posizione del problema . . . . . Pag. 328
§ 2. Ricerca degli spostamenti . . . . . „ 329

§ 3. Carattere generale della deformazione. Flessione sferica . . . . . Pag. 334
§ 4. Flessione non uniforme . . . . . „ 337
§ 5. Deformazione corrispondente alle due funzioni φ e ψ. Estensione . . . . . „ 339

CAPITOLO UNDECIMO.

I problemi del prof. Voigt e la determinazione delle costanti elastiche dei cristalli.

§ 1. Posizione del problema . . . . . Pag. 344
§ 2. Ricerca di una deformazione costante lungo l'asse del cilindro . . . . . „ 345
§ 3. Ricerca di una deformazione costante lungo l'asse del cilindro e in cui le forze interne sono parallele all'asse . . . . . „ 348
§ 4. Ricerca di una seconda deformazione . . . „ 360

CAPITOLO PRIMO.

LE FUNZIONI ARMONICHE E POLIARMONICHE ED I TEOREMI DI GREEN.

§ 1. Funzioni armoniche e poliarmoniche. — Sia u una funzione delle variabili indipendenti $x, y, z, \ldots$, che in un certo campo ammetta le derivate prime, seconde, ecc. Poniamo:

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \ldots;$$

si dice che sulla u si è eseguita l'operazione Δ_2. Il risultato di questa operazione è una nuova funzione delle $x, y, \ldots$; eseguiamo su questa nuovamente l'operazione Δ_2 e poniamo:

$$\Delta_4 u = \Delta_2 \Delta_2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \ldots + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \ldots$$

cioè, simbolicamente:

$$\Delta_4 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \ldots \right)^2.$$

Il risultato di questa nuova operazione è ancora una funzione di $x, y, \ldots$ sulla quale possiamo eseguire l'operazione Δ_2, ottenendo:

$$\Delta_6 u = \Delta_2 \Delta_4 u = \Delta_2 \Delta_2 \Delta_2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \ldots\right)^3.$$

Accenniamo finalmente con Δ_{2n} il risultato della operazione Δ_2 eseguita n volte di seguito sulla u, cioè:

$$\Delta_{2n} u = \Delta_2 \Delta_2 \ldots \Delta_2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \ldots\right)^n.$$

Se c è costante; $u, v, \ldots$ funzioni di $x, y, \ldots$ si ha

$$\Delta_{2n}(c\,u) = c\,\Delta_{2n} u\,,$$

$$\Delta_{2n}(u + v + \ldots) = \Delta_{2n} u + \Delta_{2n} v + \ldots,$$

$$\Delta_2(u\,v) = u\,\Delta_2 v + v\,\Delta_2 u + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots\right).$$

Queste operazioni sono invariantive rispetto a qualsivoglia trasformazione ortogonale. Poniamo infatti:

$$x_1 = \xi + a_1 x + b_1 y + \ldots$$

$$y_1 = \eta + a_2 x + b_2 y + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

essendo:

$$a_1^2 + b_1^2 + \ldots \quad = 1$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + \ldots \quad = 0$$

ecc.

Poichè successivamente si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial u}{\partial y_1} a_2 + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} a_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} a_2^2 + \ldots + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1} a_1 a_2 + \ldots,$$

risulta subito

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \ldots = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \ldots$$

e così di seguito.

Una funzione che in un campo è monodroma, finita e continua si dirà brevemente *regolare*.

Una funzione regolare in un certo campo insieme colle sue derivate prime e inoltre tale che il risultato dell'operazione Δ_2 è nullo, cioè che soddisfa alla equazione:

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \ldots = 0,$$

dicesi *armonica*.

Se è regolare colle derivate fino all'ordine $2n-1$ e inoltre soddisfa l'equazione:

$$\Delta_{2n} u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \ldots\right)^n = 0,$$

dicesi *poliarmonica o armonica di grado n*.

Si hanno quindi funzioni armoniche di primo grado o semplicemente armoniche; di secondo grado o biarmoniche; ecc. La considerazione di queste funzioni è della massima importanza in molte

ricerche di fisica matematica e specialmente nella teoria dell'elasticità.

§ **2. Esempii di funzioni poliarmoniche.** — Sia r la distanza tra due punti M, M_1, rispettivamente di coordinate x, y, z; x_1, y_1, z_1; cioè:

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Supponiamo M variabile, fisso M_1 e quindi, riguardiamo r come funzione di x, y, z. Poichè:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_1}{r},$$

si conclude che:

$\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}$, *rappresentano i coseni del vettore* $M_1 M$.

D'altra parte x, y, z, si possono pensare a loro volta come funzioni di r e dei coseni stessi e poichè

$$x - x_1 = r \cos(r, x),$$

risulta

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial x} = \cos(r, x)$$

ecc.

Notiamo di qui che, se u è funzione della sola r, si ha

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \sum \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \sum \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r},$$

onde:

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r};$$

della quale si farà uso frequente.

Consideriamo un campo piano limitato da una curva σ (contorno); scegliamo il punto fisso esterno al campo, mentre il punto M varî entro il campo stesso. La distanza r tra questi due punti è una funzione regolare di x, y; nè potendo M venir mai a coincidere con M_1, è sempre diversa da zero.

La funzione $\log r$ è regolare colle sue derivate di qualunque ordine nel campo; inoltre essendo:

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2(x - x_1)^2}{r^4}$$

ecc., si ha

$$\Delta_2 (\log r) = 0.$$

Dunque la funzione $\log r$ è armonica.

Si ha ancora:

$$\Delta_2 (r^2 \log r) = 4 (\log r + 1)$$

$$\Delta_4 (r^2 \log r) = 0$$

onde la funzione $r^2 \log r$ è biarmonica.

Consideriamo ora un campo a tre dimensioni, ferme restando le altre ipotesi. Se k è una costante, si trova:

$$\Delta_2 r^k = (k + 1) k r^{k-2}$$

$$\Delta_4 r^k = (k + 1) k (k - 1) (k - 2) r^{k-4}$$

. . . . . .

$$\Delta_{2n} r^k = (k + 1) k (k - 1) \ldots (k - 2n + 2) r^{k-2n}.$$

Escludendo il caso di $k = 0$, si vede subito che

$\frac{1}{r}$ è armonica; r ed r^2 sono biarmoniche e in generale:

$$r^{2n-3}, \quad r^{2n-4}$$

sono armoniche di grado n.

Sia u una funzione della sola r, e ricerchiamo la forma più generale di u armonica di grado n. Indicando con accenti le derivazioni rispetto ad r, otteniamo anzitutto

$$\Delta_2 u = u'' + 2\frac{u'}{r},$$

$$\Delta_2\left(\frac{u}{r}\right) = \frac{1}{r}\Delta_2 u + u\,\Delta_2\left(\frac{1}{r}\right) + 2\sum\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x};$$

ma è

$$\sum\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{u'}{r^2},$$

onde

$$\Delta_2\left(\frac{u}{r}\right) = \frac{u''}{r}.$$

Di qui si trae:

$$\Delta_4 u = \Delta_2 u'' + 2\,\Delta_2\left(\frac{u'}{r}\right) = u^{(4)} + 4\frac{u^{(3)}}{r},$$

e così di seguito. In generale:

$$\Delta_{2n} u = u^{(2n)} + 2n\frac{u^{(2n-1)}}{r} = 0;$$

posto

$$v = u^{(2n-1)}$$

avremo:

$$v' + \frac{2n}{r} v = 0$$

la quale, con una integrazione, ci dà

$$v = \frac{c}{r^{2n}}$$

e però:

$$u = \frac{c}{r} + c_1 r^{2n-2} + c_2 r^{2n-3} + \ldots$$

La u così determinata è dunque una combinazione lineare delle soluzioni precedentemente trovate.

Si conclude pure che in un campo a tre dimensioni $\frac{1}{r}$ è la sola funzione armonica dipendente da r.

§ **3. Derivata di direzione.** — Ad un punto $M(x, y, z)$ si riferisca una certa direzione n; diciamo dx, dy, dz gli accrescimenti infinitesimi di x, y, z, allorchè M passa in M' sulla n e pongasi $MM' = dn$. I coseni direttori di n sono espressi da $\frac{dx}{dn}$, $\frac{dy}{dn}$, $\frac{dz}{dn}$. Riguardiamo poi le derivate di una funzione u come le componenti di un vettore applicato in M.

La componente, secondo n, di tale vettore è espressa da:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{du}{dn}$$

in cui du esprime il differenziale totale di u nel passaggio di M in M'. Tale componente, espressa dal quoziente dei due differenziali du e dn, chiamasi *derivata della u secondo la direzione n.*

Possiamo, in modo analogo, definire la derivata seconda; e sarà

$$\frac{d^2 u}{d n^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{d x}{d n}\right)^2 + \ldots + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\,\frac{d y}{d n}\,\frac{d z}{d n} + \ldots$$

e così via.

Si dimostra agevolmente che tutti i teoremi sulle ordinarie derivate valgono anche per le derivate di direzione.

Se u è funzione della distanza r tra due punti, si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \Sigma\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} = \Sigma\,\frac{\partial u}{\partial x}\cos(x, r);$$

il secondo membro esprime per definizione la derivata di u secondo la direzione r, la quale coincide colla derivata parziale di u rispetto r.

§ 4. Angolo visuale di una curva piana o di una superficie. — Sia σ una curva piana riguardata come avente due bordi: uno positivo, negativo l'altro; n la normale diretta dalla parte del bordo positivo. In M considero un elemento d'arco $d\sigma$ che proietto da un punto O del piano.

L'angolo $M\,O\,M'$ riguardato positivo o negativo a seconda che il lato $M\,M'$, base del triangolo $M\,O\,M'$, poggia sul bordo positivo o negativo del contorno, dicesi *angolo visuale dell'elemento* $d\sigma$ *dal polo O.*

Centro in O descriviamo due archi di cerchio $d\sigma_1$ e $d\omega$ di raggi rispettivi $r = OM$ ed 1. Potendo considerare $d\sigma_1$ come la proiezione ortogonale di $d\sigma$, si ha

$$d\sigma_1 = r\,d\omega = -d\sigma \cos(r, n),$$

poichè nell'ipotesi che il triangolo OMM' abbia il lato MM' sulla parte positiva del contorno l'angolo di r con n è ottuso. Nel caso contrario si tiene il segno più. Di qui:

$$d\omega = -\frac{\cos(r, n)}{r} d\sigma = -\frac{1}{r}\frac{dr}{dn} d\sigma = \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} d\sigma.$$

L'arco $d\omega$ è l'angolo visuale dell'elemento.

Diremo *angolo visuale di un arco* σ *dal polo* O l'angolo formato dai raggi che vanno da O agli estremi dell'arco, riguardato positivo o negativo secondo che O giace dalla parte positiva o negativa dell'arco. Esso è anche misurato dall'arco di cerchio di raggio uno che ha centro in O ed è intercetto dai raggi estremi.

Accennando con (σ) tale angolo avremo:

$$(\sigma) = \int \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} d\sigma \tag{1}$$

l'integrazione essendo estesa all'arco σ e la normale rivolta dalla parte positiva dell'arco.

Se quindi σ è una curva chiusa e si riguarda positiva la parte interna all'area da essa limitata, si ha

$$(\sigma) = 2\pi,\ \pi,\ 0$$

secondo che il polo è interno, sul contorno in un punto ordinario od esterno.

Considerazioni analoghe valgono per le superficie.

L'angolo visuale di σ da un polo O è l'area che sulla superficie sferica di centro O e raggio uno è staccata dal cono che proietta il contorno di σ da O.

Riguardiamo σ come avente due facce: una positiva e l'altra negativa e riteniamo l'angolo visuale positivo o negativo secondo che il cono suddetto ha per base la parte positiva o negativa di σ.

Se $d\sigma$ è un elemento di σ; $d\omega$ il suo angolo visuale; n la normale volta verso la parte positiva di σ, si vede subito, come precedentemente, che

$$d\omega = -\frac{\cos(r, n)}{r^2} d\sigma = \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma$$

e quindi:

$$(\sigma) = \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma. \qquad (1')$$

Se σ è una superficie chiusa e si assume positiva la parte interna di σ, si ha

$$(\sigma) = 4\pi,\ 2\pi, 0$$

secondo che O è interno, sul contorno in un punto ordinario, od esterno.

Dalla (1) si passa alla (1') cambiando $\log \frac{1}{r}$ in $\frac{1}{r}$. Se σ è un insieme di superficie con piano

tangente determinato, tagliate un numero finito di volte da una retta qualunque, con un numero finito di punti conici isolati e di linee singolari con due piani tangenti determinati, si ha più in generale:

$$(\sigma) = \int (p' - p'')\, d\omega$$

dove p' è il numero degli elementi $d\sigma$, corrispondenti a $d\omega$, che volgono la faccia positiva ad O e p'' il numero di quelli che volgono la faccia negativa.

Il punto O può anche giacere in un punto di σ.

Indicando quindi con p un numero finito si ha:

$$\int \left| d\frac{1}{r} \Big/ dn \right| d\sigma < 4\pi p.$$

§ **5. Lemmi di Gauss.** — 1.° *Se in un campo S, il cui contorno è σ, una funzione u ammette la derivata prima rispetto ad x atta alla integrazione ed inoltre u è regolare eccetto in uno o un numero discreto di punti in cui diventa infinita come* $\log r$ *o come* $\frac{1}{r}$, *secondo che S è a due o a tre dimensioni; si ha*

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} dS = -\int u \frac{dx}{dn} d\sigma \qquad (2)$$

n essendo la normale a σ positiva nell'interno di S.

Nel Calcolo questo teorema è dimostrato nella ipotesi di u sempre regolare e non ripeteremo qui la dimostrazione. Supponiamo invece che, il campo

essendo a due dimensioni, in un punto O la u diventi infinita come $\log r$, r essendo la distanza da O di un punto del campo. Sarà dunque:

$$\lim_{r=0} \frac{u}{\log r} = \text{quant. finita},$$

e in conseguenza

$$\lim_{r=0} r \frac{\partial u}{\partial x} = \text{quant. finita}; \quad \lim_{r=0} r^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Centro in O e con raggio r si descriva un cerchio S_0 di contorno σ_0 tutto contenuto in S; escludiamo da S l'area S_0; all'area risultante è applicabile il lemma essendo ivi la u sempre regolare. Quindi notando che la normale a σ_0 coincide con r (crescente) quando è volta verso $S - S_0$, si ha

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} dS - \int \frac{\partial u}{\partial x} d S_0 = - \int u \frac{d x}{d n} d \sigma - \int u \frac{d x}{d r} d \sigma_0. \quad (2')$$

Assumendo per elemento d'area $d S_0$ il settore infinitesimo di apertura $d \omega$ che ha vertice in O, si ha:

$$d S_0 = \frac{1}{2} r^2 d \omega;$$

quindi

$$\lim_{r=0} \int \frac{\partial u}{\partial x} d S_0 = \lim_{r=0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} r^2 d \omega = 0.$$

Inoltre:

$$\lim_{r=0} \int u \frac{dx}{dr} d\sigma_0 = \lim_{r=0} \int_0^{2\pi} u \frac{dx}{dr} r\, d\omega =$$

$$= \lim_{r=0} \int_0^{2\pi} \frac{u}{\log r} \frac{dx}{dr} r \log r\, d\omega;$$

e poichè $u : \log r$ ha un limite finito; $\frac{dx}{dr}$ è sempre compreso tra $+1$ e -1; $r \log r$; tende a zero, così il limite precedente è nullo.

Ma allora dalla (2') facendo impiccolire indefinitamente il raggio r si deduce precisamente la (2).

La stessa dimostrazione si farà nel caso di un campo a tre dimensioni, se in un punto di questo la u è tale che:

$$\lim_{r=0} r u = 0.$$

2.° *Se u è una funzione regolare e derivabile ed r indica la distanza di un punto fisso O da un punto variabile del campo a due dimensioni, si ha*

$$\int u \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} d\sigma + \int \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial r} dS = (\sigma)\, u(0); \quad (3)$$

se il campo è a tre dimensioni, sostituendo $\log \frac{1}{r}$

con $\frac{1}{r}$, *si ha*

$$\int u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma + \int \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} dS = (\sigma) u(0). \quad (3')$$

Con u (0) intendiamo il valore di u nel polo O. Infatti abbiamo successivamente:

$$u \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} = \sum u \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dx}{dn},$$

$$u \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{u}{r} \frac{\partial x}{\partial r}.$$

Se supponiamo il punto O esterno al campo, $\frac{u}{r}$ è sempre regolare; il lemma (2) è applicabile e quindi:

$$\int u \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} d\sigma = -\sum \int \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x}\right) dS;$$

e poichè:

$$\sum \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x}\right) = u \Delta_2\left(\log \frac{1}{r}\right) + \sum \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial r},$$

risulta dimostrata la (3) essendo $(\sigma) = 0$.

Lo stesso può ripetersi pel campo a tre dimensioni perchè in tal caso:

$$u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = - \frac{u}{r^2} \frac{\partial x}{\partial r}$$

è sempre regolare.

Se invece il polo O è interno, $\frac{u}{r}$ oppure $\frac{u}{r^2}$ diventano nel polo infinite come $\frac{1}{r}$ o come $\frac{1}{r^2}$; il lemma (2) non è più applicabile

Ma osserviamo che:

$$u = u(0) + r u'(0) + \ldots$$

e quindi: $\frac{u - u(0)}{r}$ è sempre finita ed $\frac{u - u(0)}{r^2}$ diventa infinita come $\frac{1}{r}$; dunque la formula

$$\int u \frac{d \log \frac{1}{r}}{d n} d\sigma + \int \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial r} d S = 0$$

è applicabile alla funzione $u - u(0)$. Sostituendo in luogo di u, $u - u(0)$ e tenendo presente la (1) risulta agevolmente la (3).

§ **6. Lemmi di Green.** — Sia v regolare in S insieme colle derivate prime, e la u, generalmente regolare, in qualche punto di S possa diventare infinita come $\log \frac{1}{r}$ o come $\frac{1}{r}$, secondo che il campo è a due o a tre dimensioni.

Abbiamo l'identità:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)-u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Integriamo a tutto il campo S e notiamo che alla $u\dfrac{\partial v}{\partial x}$ è applicabile il lemma (2); quindi:

$$\int\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\,dS=-\int u\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dn}\,d\sigma-\int u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dS.$$

Cambiando x in y e z e sommando le eguaglianze ottenute, si ha

$$\Sigma\int\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\,dS+\int u\frac{dv}{dn}\,d\sigma+\int u\,\Delta_2 v\,dS=0;\quad(4)$$

questa eguaglianza esprime il *primo lemma di Green.*

Se supponiamo invece che v, anzichè u, possa diventare infinita al modo solito, allora avremo

$$\Sigma\int\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\,dS+\int v\frac{du}{dn}\,d\sigma+\int v\,\Delta_2 u\,dS=0.\quad(5)$$

Se finalmente u e v sono regolari colle loro derivate prime senza eccezioni, la (4) e (5) sussistono contemporaneamente. Per sottrazione si ha

$$\int\left(u\frac{dv}{dn}-v\frac{du}{dn}\right)d\sigma+\int(u\,\Delta_2 v-v\,\Delta_2 u)\,dS=0\quad(6)$$

la quale esprime il *secondo lemma di Green.*

Esso sussiste in condizioni per u e v più restrittive del primo.

Generalizziamo questo lemma, e poniamo per compendio:

$$u_0 = u,\ u_2 = \Delta_2 u,\ u_4 = \Delta_4 u,\ \text{ecc.}\ldots,$$

$$v_0 = v,\ v_2 = \Delta_2 v,\ v_4 = \Delta_4 v,\ \text{ecc.}\ldots\ldots$$

e supponiamo le $u_0, u_2, \ldots, v_0, v_2, \ldots$ tutte regolari. Applichiamo successivamente il lemma (6) alle coppie di funzioni u_0, v_{2m-2}; e poi u_2, v_{2m-4}; ecc,... e finalmente alle u_{2m-2}, v_0. Sommando tutte le equazioni così ottenute otterremo:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{h=0} \int \left(\Delta_{2h} u \frac{d\, \Delta_{2k} v}{d\, n} - \Delta_{2k} v \frac{d\, \Delta_{2h} u}{d\, n} \right) d\sigma + \\ + \int (u\, \Delta_{2m} v - v\, \Delta_{2m} u)\, d\, S = 0\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

in cui:

$$h + k = m - 1.$$

La precedente eguaglianza esprime il lemma di Green in generale.

Notiamo alcune conseguenze. Nella (6) facciasi $v = 1$; risulterà

$$\int \frac{d\, u}{d\, n} d\sigma + \int \Delta_2 u\, d\, S = 0; \qquad (8)$$

e se più in particolare è

$$\Delta_2 u = 0,$$

si ha il seguente teorema:

una funzione armonica in un campo soddisfa al

contorno alla

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma = 0 . \tag{9}$$

§ 7. Teoremi di Green. — Il campo sia a due dimensioni; nella (5) facciasi $v = \log \frac{1}{r}$, dove r è la distanza di un punto O interno, e a distanza finita dal contorno, da un punto qualunque del campo, non escluso il contorno. Ciò è evidentemente legittimo.

Poichè:

$$\Sigma \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial r},$$

risulta

$$\int \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial r} dS + \int \log \frac{1}{r} \frac{du}{dn} d\sigma +$$

$$+ \int \log \frac{1}{r} \Delta_2 u \, dS = 0.$$

Ricordando il lemma (3) si ha quindi

$$\left.\begin{aligned} &2\pi u(0) = \\ &= \int \left(u \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} - \log \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) d\sigma - \int \log \frac{1}{r} \Delta_2 u \, dS. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Se il campo è a tre dimensioni, facendo $v = \frac{1}{r}$

nella (5) e procedendo come prima, si ha

$$\left.\begin{aligned} &4\pi u(0) = \\ &= \int\left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right)d\sigma - \int\frac{1}{r}\Delta_2 u\, dS. \end{aligned}\right\} \quad (10')$$

Le (10) e (10') esprimono il *teorema di Green per l'operazione* Δ_2.

Esso permette di assegnare, in un punto interno di un campo, il valore di una funzione regolare insieme colle derivate prime e che ammette le derivate seconde, purchè sia noto:

1° il valore del $\Delta_2 u$ in un punto qualunque interno;

2° i valori di u e $\frac{du}{dn}$ in un punto qualunque del contorno.

La (10), come vedremo, è della massima importanza. Può dimostrarsi con procedimento più diretto così. Supponiamo, per maggior semplicità, la u armonica nel campo. Centro in O e con raggio ρ descrivasi un cerchio σ_0 contenuto in S; la funzione $\log\frac{1}{r}$ è armonica nello spazio compreso tra σ e σ_0; ivi dunque è applicabile il secondo lemma di Green (6); e si ha

$$\int\left(u\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} - \log\frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right)d\sigma +$$
$$+\int\left(u\frac{d\log\frac{1}{\rho}}{d\rho} - \log\frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho}\right)d\sigma_0 = 0.$$

Ma in virtù della (9) si ha

$$\int \log \frac{1}{\rho} \frac{d u}{d \rho} d \sigma_0 = \log \frac{1}{\rho} \int \frac{d u}{d \rho} d \sigma_0 = 0.$$

Inoltre:

$$\int u \frac{d \log \frac{1}{\rho}}{d \rho} d \sigma_0 = - \int_0^{2\pi} u \, d \omega,$$

essendo come al solito

$$d \sigma_0 = \rho \, d \omega.$$

Detti M ed m il limite superiore ed inferiore dei valori che u prende su σ_0, l'ultimo integrale è compreso tra $2 \pi M$ e $2 \pi m$; e quindi al limite per $\rho = 0$ tende a $-2 \pi u(0)$; dunque

$$2 \pi u(0) = \int \left(u \frac{d \log \frac{1}{r}}{d n} - \log \frac{1}{r} \frac{d u}{d n} \right) d \sigma,$$

che è precisamente il teorema di Green per le funzioni armoniche.

Questo procedimento è applicabile al caso di un campo a tre dimensioni e alle operazioni Δ_4, Δ_6, ecc.

Il campo sia a tre dimensioni e in questo u, v siano regolari colle loro derivate prime, seconde, ecc. Il lemma (7) di Green ci dà

$$0 = \int \left(u \frac{d \Delta_2 v}{d n} - \Delta_2 v \frac{d u}{d n} \right) d \sigma +$$

$$+\int\left(\Delta_2 u\frac{dv}{dn}-v\frac{d\Delta_2 u}{dn}\right)d\sigma+$$

$$+\int(u\,\Delta_4 v-v\,\Delta_4 u)\,dS.$$

Centro in un punto O interno al campo e con raggio ρ descriviamo una sfera S_0 di superficie σ_0 contenuta in S; indichi r la distanza di un punto qualunque del campo da O. Posto:

$$v=r,\quad \Delta_2 v=\frac{2}{r},\quad \Delta_4 v=0,$$

in tutto il campo $S-S_0$ la v e $\Delta_2 v$ sono regolari, quindi il lemma è applicabile alla $v=r$ nel campo suddetto. Avremo dunque:

$$\int\left(\Delta_2 u\frac{dr}{dn}-r\frac{d\Delta_2 u}{dn}\right)d\sigma+$$

$$\int\left(u\frac{d\Delta_2 r}{dn}-\Delta_2 r\frac{du}{dn}\right)d\sigma-\int r\,\Delta_4 u\,dS+$$

$$+\int\left(\Delta_2 u\frac{dr}{dn_0}-r\frac{d\Delta_2 u}{dn_0}\right)d\sigma_0+$$

$$+\int\left(u\frac{d\Delta_2 r}{dn_0}-\Delta_2 r\frac{du}{dn_0}\right)d\sigma_0+\int r\,\Delta_4 u\,dS_0=0.$$

Ma abbiamo:

$$\int r\frac{d\Delta_2 u}{dn_0}\,d\sigma_0=\rho\int\frac{d\Delta_2 u}{dn_0}\,d\sigma_0;\ \int\Delta_2 u\frac{dr}{dn_0}\,d\sigma_0=$$

$$=\int\Delta_2 u\,d\sigma_0;\ \int\Delta_2 r\frac{du}{dn_0}\,d\sigma_0=2\rho\int\frac{du}{dn_0}\,d\omega.$$

Quindi col tendere di ρ a zero questi integrali tendono a zero. Lo stesso avviene dell'integrale relativo ad S_0. Infine:

$$\int u \frac{d\,\Delta_2\, r}{d\,n_0}\, d\,\sigma_0 = 2 \int u \frac{d\,\frac{1}{r}}{d\,n_0}\, d\,\sigma_0 = -2 \int u\, d\,\omega$$

ha, come nel caso precedente, per limite

$$-\,8\,\pi\, u\,(0):$$

dunque otteniamo:

$$\left.\begin{aligned} 8\,\pi\, u\,(0) = & \int \left(u \frac{d\,\Delta_2\, r}{d\,n} - \Delta_2\, r \frac{d\,u}{d\,n} \right) d\,\sigma\, + \\ + & \int \left(\Delta_2\, u \frac{d\,r}{d\,n} - r \frac{d\,\Delta_2\, u}{d\,n} \right) d\,\sigma - \int r\, \Delta_4\, u\, d\,S. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Se invece il campo è a due dimensioni, ponendo:

$$v = r^2 \log \frac{1}{r}$$

e procedendo come prima si trova una formula analoga alla precedente ma in cui r è sostituito da

$$r^2 \log \frac{1}{r}$$

Queste formule esprimono il *teorema di Green per l'operazione* Δ_4; esso fa conoscere in un punto qualunque interno al campo il valore di una funzione regolare insieme colle derivate prime, seconde ecc., quando è noto:

1° il $\Delta_4 u$ in ogni punto del campo;

2° i valori di u, $\frac{du}{dn}$, $\Delta_2 u$, $\frac{d\Delta_2 u}{dn}$ in ogni punto del contorno *.

§ 8. Condizioni che individuano le funzioni poliarmoniche. — Abbiamo già accennato alle condizioni che fanno conoscere in un punto di un campo il valore di una funzione armonica o biarmonica. Ma esse non sono tutte necessarie; ciò risulta dai seguenti teoremi.

Una funzione regolare colle sue derivate prime ecc. in un campo è determinata se è noto il $\Delta_2 u$ in tutto il campo, cioè se ivi soddisfa alla equazione

$$\Delta_2 u = f,$$

e se sono noti i valori che u prende al contorno; è determinata a meno di una costante se sono noti i valori che $\frac{du}{dn}$ prende al contorno, purchè questi soddisfacciano la (9).

Ammettendo che esista una tale funzione, supponiamo, se è possibile, averne determinate due: u', u''. Pongasi:

$$v = u' - u''.$$

In ogni punto del campo sarà

$$\Delta_2 v = \Delta_2 u' - \Delta_2 u'' = 0;$$

* Mathieu, *Journal d. Mathém.*, **14**; 1869.

La (11) e la analoga nello spazio a due dimensioni, come pure le prime ricerche e proprietà delle funzioni biarmoniche, sono dovute al Mathieu.

dunque la v è armonica. In uno stesso punto del contorno u', u'', oppure le loro derivate normali, debbono assumere lo stesso valore e quindi sarà:

$$v = 0; \text{ oppure, } \frac{dv}{dn} = 0.$$

Facciamo $u = v$ nel lemma (4); risulta

$$\Sigma \int \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dS + \int v \frac{dv}{dn} d\sigma + \int v \Delta_2 v \, dS = 0.$$

Il secondo e terzo integrale sono nulli in ogni caso; è quindi nullo anche il primo, cioè:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \ldots = 0.$$

La v è costante ed è quindi sempre nulla se lo è al contorno; se invece è nulla la derivata secondo la normale, v resta costante. Dunque u' ed u'' sono identiche o differiscono per una costante.

La esistenza di una siffatta funzione u, sotto certe restrizioni assai generali relative al contorno, può essere rigorosamente dimostrata *.

In particolare:

una funzione armonica in un campo è determinata dai valori che essa assume al contorno.

Da quanto poi fu dimostrato sulla v risulta:

---

* Per le numerose recenti ricerche sulla questione dell'esistenza della soluzione nel problema di Dirichlet vedi la interessante monografia di L. Silla: *Il principio di Dirichlet e il problema dei valori al contorno.* Giornale di mat. di Battaglini, **40**; 1902.

una funzione armonica in un campo, nulla oppure costante al contorno, è nulla o costante in tutto il campo.

Dimostriamo quest'altro teorema:
una funzione regolare colle sue derivate prime, seconde, ecc. in un campo è determinata se è noto il $\Delta_4 u$ *in ogni punto del campo, cioè se ivi soddisfa la*

$$\Delta_4 u = f,$$

e se sono noti al contorno i valori di u *e* $\frac{du}{dn}$.

Ne esistano infatti, se è possibile, due cioè u' ed u'' e si faccia:

$$v = u' - u'';$$

sarà v biarmonica in tutto il campo e al contorno

$$v = \frac{dv}{dn} = 0.$$

Applichiamo il lemma (6) alle due funzioni v e $\Delta_2 v$: avremo

$$\int \left(v \frac{d \Delta_2 v}{dn} - \Delta_2 v \frac{dv}{dn} \right) d\sigma +$$

$$+ \int (v \Delta_4 v - \Delta_2 v \Delta_2 v) \, dS = 0,$$

cioè:

$$\int (\Delta_2 v)^2 \, dS = 0,$$

quindi:

$$\Delta_2 v = 0,$$

$$v = 0; \qquad u' = u''.$$

Abbiamo pure:
una funzione biarmonica in un campo, nulla al contorno insieme colla sua derivata normale, è nulla in tutto il campo;
una funzione biarmonica in un campo è determinata allorchè sono noti i valori che essa e la sua derivata normale assumono al contorno.

È ora facile estendere questi teoremi alle funzioni poliarmoniche.

§ 9. Funzioni di Green. Problema dei valori al contorno. — Vogliamo ora occuparci della determinazione di quelle funzioni regolari determinate dalle condizioni del § precedente.

Tale problema presenta una duplice difficoltà dipendente dalla forma del contorno e dai valori dati su questo.

Esso dicesi *problema dei valori al contorno o problema di Dirichlet.* Occorre evidentemente poter eliminare dalle (10), (11) i valori

$$\frac{d\,u}{d\,n},\ \Delta_2\,u,\ \frac{d\,\Delta_2\,u}{d\,n},\ \text{ecc.}$$

Tale eliminazione è possibile colla ricerca delle così dette funzioni di Green; cioè di certe funzioni armoniche determinate da speciali condizioni al contorno.

Dicesi funzione prima di Green, o di primo grado, di un campo a due dimensioni quella funzione armonica che al contorno assume valori eguali a $\log\frac{1}{r}$, *essendo r la distanza di un punto arbitrario ma fisso* M_1 *del campo da un altro punto qualunque.*

Se il campo è a tre dimensioni $\log \frac{1}{r}$ *va sostituito con* $\frac{1}{r}$.

Sia G_1 il valore di tale funzione unica (e per la cui determinazione, dipendente dalla sola forma del contorno, non si possono assegnare regole generali) in un punto generico M (diverso dal polo M_1); allorchè M è sul contorno avremo:

$$G_1 = \log \frac{1}{r}\,; \quad \text{oppure,} \quad G_1 = \frac{1}{r}\,. \tag{12}$$

Il valore che $\frac{d\,G_1}{d\,n}$ assume al contorno si può calcolare solamente dopo di aver determinata la G_1.

Il lemma (6) è applicabile alle due funzioni u e G_1 e ci dà:

$$\int \left(u \frac{d\,G_1}{d\,n} - G_1 \frac{d\,u}{d\,n} \right) d\,\sigma - \int G_1\, \Delta_2\, u\, d\,S = 0.$$

Sottraendo questa eguaglianza dalla (10) e tenuto conto della prima delle (12) risulta pel valore di u nel polo M_1:

$$\left.\begin{aligned} &2\,\pi\, u\,(x_1, y_1) = \\ &= \int u \frac{d}{d\,n} \left(\log \frac{1}{r} - G_1 \right) d\,\sigma - \int \left(\log \frac{1}{r} - G_1 \right) \Delta_2\, u\, d\,S. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

E così:

$$\left.\begin{aligned} &4\,\pi\, u\,(x_1, y_1, z_1) = \\ &= \int u \frac{d}{d\,n} \left(\frac{1}{r} - G_1 \right) d\,\sigma - \int \left(\frac{1}{r} - G_1 \right) \Delta_2\, u\, d\,S; \end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

le quali formule risolvono il problema dei valori al contorno per l'operazione Δ_2.

Dicesi funzione seconda di Green, o di secondo grado, di un campo a due dimensioni quella funzione biarmonica che al contorno soddisfa alle condizioni

$$G_2 = r^2 \log \frac{1}{r}; \frac{d\,G_2}{d\,n} = \frac{d\left(r^2 \log \frac{1}{r}\right)}{d\,n}; \tag{14}$$

se il campo è a tre dimensioni, sostituendo $\log \frac{1}{r}$ *con* $\frac{1}{r}$, *dovrà soddisfare alle*

$$G_2 = r; \quad \frac{d\,G_2}{d\,n} = \frac{d\,r}{d\,n}. \tag{14'}$$

La G_2 è calcolata in un punto M diverso dal polo M_1.

Il lemma (7) è applicabile alle due funzioni u e G_2; tenuto conto delle (14) esso ci dà:

$$\int\left(u\,\frac{d\,\Delta_2\,G_2}{d\,n} - \Delta_2\,G_2 \frac{d\,u}{d\,n}\right) d\,\sigma +$$

$$+ \int\left(\Delta_2\,u\,\frac{d\left(r^2 \log \frac{1}{r}\right)}{d\,n} - r^2 \log \frac{1}{r}\,\frac{d\,\Delta_2\,u}{d\,n}\right) d\,\sigma -$$

$$- \int G_2\,\Delta_4\,u\,d\,S = 0.$$

Sottraendo questa equazione dalla (11), si ha

$$\left.\begin{aligned} &8\pi u(x_1, y_1) = \\ &= \int\left(u\frac{d\,\Delta_2\left(r^2\log\frac{1}{r} - G_2\right)}{d\,n} - \Delta_2\left(r^2\log\frac{1}{r} - G_2\right)\frac{d\,u}{d\,n}\right)d\sigma - \\ &\quad - \int\left(r^2\log\frac{1}{r} - G_2\right)\Delta_4\,u\,d\,S; \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

mentre pel campo a tre dimensioni:

$$\left.\begin{aligned} &8\pi u(x_1, y_1, z_1) = \\ &= \int\left(u\frac{d\,\Delta_2(r - G_2)}{d\,n} - \Delta_2(r - G_2)\frac{d\,u}{d\,n}\right)d\sigma - \\ &\quad - \int(r - G_2)\,\Delta_4\,u\,d\,S; \end{aligned}\right\} \quad (15')$$

le quali risolvono il problema dei valori al contorno per l'operazione Δ_4.

Il problema della determinazione di una funzione regolare, allorchè è noto il valore del Δ_2 in ogni punto del campo e i valori della sua derivata normale al contorno, può risolversi determinando una funzione armonica G tale che al contorno soddisfi alla

$$\frac{d\,G}{d\,n} = \frac{d\log\frac{1}{r}}{d\,n} + \text{cost}; \text{ oppure, } \frac{d\,G}{d\,n} = \frac{d\frac{1}{r}}{d\,n} + \text{cost.}$$

Si può sempre disporre infatti di questa costante in modo da rendere soddisfatta la (9) che nel caso attuale diventa, per la (1),

$$(\sigma) + \text{cost}\int d\,\sigma = 0.$$

Se la superficie σ è indefinita, la costante è nulla.

La G è determinata a meno di una costante. Procedendo come al solito si trova:

$$\left.\begin{aligned} &2\pi u(x_1, y_1) = \\ &= \int\left(G - \log\frac{1}{r}\right)\frac{du}{dn}d\sigma + \int\left(G - \log\frac{1}{r}\right)\Delta_2 u\, dS; \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Se lo spazio è a tre dimensioni si sostituirà 2π con 4π e $\log\frac{1}{r}$ con $\frac{1}{r}$.

Aumentando G di una costante il secondo membro verrà aumentato di

$$c\left(\int\frac{du}{dn}d\sigma + \int\Delta_2 u\, dS\right),$$

che, per la (8), è nullo; dunque il secondo membro non varia.

§ **10. Determinazione delle funzioni di Green in alcuni casi semplici.** — 1°. Il campo sia limitato da un cerchio o da una sfera di raggio a; sia M_1 il polo, O il centro, $OM_1 = \rho$: un punto M'_1 posto su OM_1 e tale che:

$$OM_1 \,.\, OM'_1 = \rho\rho' = a^2$$

dicesi immagine di M_1 rispetto al cerchio (sfera).

Ogni punto del campo, eccetto il centro, ha per immagine un punto proprio; i punti del contorno coincidono con la loro immagine.

Sia M un altro punto interno al campo; r ed r' le sue distanze da M_1 ed M'_1. Poniamo:

$$r_1 = \frac{\rho}{a} r'$$

essendo r_1 funzione delle coordinate di M. Allorchè questo cade sul contorno in M', i due triangoli $O\,M_1\,M'$, $O\,M'_1\,M'$ essendo simili si ha:

$$O\,M_1 : O\,M' = M_1\,M' : M'_1\,M'$$

cioè:

$$r = \frac{\rho}{a} r';$$

dunque sul contorno:

$$r_1 = r.$$

La funzione r_1 è regolare nel campo e diversa da zero non potendo M coincidere con M'_1 e però r' diversa da zero.

Di qui segue che $\log \frac{1}{r_1}$ è armonica nel cerchio $\left(\frac{1}{r_1} \text{ nella sfera}\right)$ ed al contorno assume il valore $\log \frac{1}{r}$ $\left(\text{oppure } \frac{1}{r}\right)$ dunque:

$$G_1 = \log \frac{1}{r_1}; \text{ oppure, } G_1 = \frac{1}{r_1}. \qquad (17)$$

Se il polo M_1 cade nel centro, la ricerca precedente non è più valida; ma si scorge subito che

la G_1 è in tal caso:

$$\log \frac{1}{a}; \text{ oppure } \frac{1}{a}.$$

Se rispetto all'origine O sono $x_1, y_1 \ldots$ le coordinate di M_1; $x, y, \ldots$ quelle di M; $x'_1, y'_1, \ldots$ quelle di M'_1, si ha:

$$\rho \rho' = a^2; \quad \frac{x_1}{\rho} = \frac{x'_1}{\rho'} \text{ ecc.}; \quad x'_1 = \frac{a^2}{\rho^2} x_1; \text{ ecc.}$$

Quindi:

$$r_1^2 = \frac{\rho^2}{a^2} \sum \left(x - \frac{a^2}{\rho^2} x_1 \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{a^2} (x_1^2 + y_1^2 + \ldots)(x^2 + y^2 + \ldots) - 2 \sum x x_1 + a^2.$$

La funzione di Green è dunque simmetrica rispetto alle coordinate di M e di M_1.

Passiamo alla seconda funzione; e consideriamo $r^2 \log \frac{1}{r_1}$ regolare colle sue derivate prime, ecc.

Poichè:

$$\Delta_2 r^2 = 4, \quad \Delta_2 \log r_1 = 0,$$

si ha:

$$\Delta_2 (r^2 \log r_1) = 4 \log r_1 + 4 \sum (x - x_1) \frac{\partial \log r_1}{\partial x};$$

e di qui:

$$\Delta_4 (r^2 \log r_1) = 4 \sum \left\{ \Delta_2 (x - x_1) \frac{\partial \log r_1}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + (x - x_1) \frac{\partial \Delta_2 \log r_1}{\partial x} \right\} + 8 \Delta_2 \log r_1 = 0.$$

Ciò posto consideriamo la:

$$u = \frac{1}{2} (r_1^2 - r^2) + r^2 \log \frac{1}{r_1} .$$

Essa è biarmonica nel cerchio, e quando M cade sul contorno assume il valore

$$r^2 \log \frac{1}{r} .$$

Di più:

$$\frac{d u}{d n} = r_1 \frac{d r_1}{d n} - r \frac{d r}{d n} + 2 r \log \frac{1}{r_1} \frac{d r}{d n} - \frac{r^2}{r_1} \frac{d r_1}{d n};$$

e sul contorno:

$$\frac{d u}{d n} = 2 r \log \frac{1}{r} \frac{d r}{d n} - r \frac{d r}{d n} = \frac{d \left(r^2 \log \frac{1}{r} \right)}{d n};$$

dunque:

$$G_2 = \frac{1}{2} (r_1^2 - r^2) + r^2 \log \frac{1}{r_1} . \qquad (18)$$

Per la sfera invece:

$$G_2 = \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_1} + \frac{1}{2} r_1 . \qquad (18')$$

Se il polo cade in O basta sostituire r_1 con a.

2.° Consideriamo ora il caso di uno spazio indefinito limitato da una retta o da un piano indefinito.

Basterà supporre nelle formule precedenti che il punto O si allontani all'infinito, con che ρ ed a tendono all'infinito ed il loro rapporto ad 1; quindi r_1 coincide con r', essendo r' la distanza di M dalla immagine M'_1 di M_1 rispetto alla retta o al piano limite; e però anche per questo caso si conosceranno G_1, G_2.

Se si assume la retta come asse x, o il piano limite come piano $x\ y$, avremo

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + (y + y_1)^2, \text{ ecc.}$$

Le funzioni di Green sono dunque simmetriche rispetto M ed M_1 *

§ 11. Risoluzione del problema dei valori al contorno per il cerchio (sfera). — Sia u una funzione armonica entro un cerchio e di cui conosciamo i valori al contorno. Il valore della u in un punto

---

* La prima funzione di Green si sa determinare per altri campi: vedi Betti: *Teorica delle forze Newtoniane.* Pisa, 1879.

Quella di secondo grado per la sfera è stata assegnata dal prof. Lauricella: *Atti R. Acc. d. Sc. di Torino*, **31**; 1896; e pel campo limitato da due circonferenze concentriche dal prof. d'Arcais: *Atti R. Ist. Ven.*, **9**, (**7**); 1898.

Per quella di grado n vedi due mie note: *Rend. Acc. Lincei*, 2° semestre 1901 e *Rend. Circ. Matem. di Palermo*, **16**; 1902.

La simmetria di G_1 rispetto alle coordinate di M e M_1 qualunque sia il contorno è stata dimostrata da Riemann: *Schwere, Elektricität u. s. w.* e per le funzioni di grado n dal dott. Boggio: *Atti R. Acc. d. Sc. di Torino*, **35**; 1900.

interno è dato dalla (13); teniamo ora presente il valore trovato per G_1 (17).

Occorre quindi calcolare al contorno

$$\frac{d}{dn}\left(\log\frac{1}{r}-\log\frac{1}{r_1}\right)=\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dn}-\frac{1}{r}\frac{dr}{dn};$$

ma:

$$\frac{dr}{dn}=\frac{x-x_1}{r}\frac{dx}{dn}+\ldots=-\frac{(x-x_1)x+\ldots}{ar}=$$

$$=-\frac{a^2}{ar}+\frac{xx_1+\ldots}{ar},$$

$$\frac{dr_1}{dn}=\frac{1}{r_1}\frac{\rho^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2}{\rho^2}x_1\right)\frac{dx}{dn}+\ldots=$$

$$=-\frac{\rho^2}{ar}+\frac{xx_1+\ldots}{ar},$$

perchè al contorno è $r_1=r$; onde:

$$2\pi u(x_1,y_1)=\frac{a^2-\rho^2}{a}\int\frac{u\,d\sigma}{r^2}. \qquad (19)$$

Se ρ ed α sono le coordinate polari di M_1 rispetto al centro; a, θ quelle di un punto qualunque del contorno, abbiamo

$$d\sigma=a\,d\theta;\ r^2=a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha);$$

donde:

$$u(x_1,y_1)=\frac{a^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\,d\theta}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}. \qquad (19')$$

Naturalmente, ad integrazione compiuta, $u(x_1, y_1)$ risulterà funzione di ρ ed α.

Per la sfera, con lo stesso procedimento, si trova

$$4\pi u(x_1, y_1, z_1) = \frac{a^2 - \rho^2}{a} \int \frac{u\, d\sigma}{r^3}. \tag{20}$$

A questa può darsi una forma notevolissima. Poniamo

$$v = \frac{1}{4\pi a} \int \frac{u\, d\sigma}{r}. \tag{21}$$

La v è regolare in tutta la sfera insieme colle derivate di qualsivoglia ordine e soddisfa la $\Delta_2 = 0$, perchè tali proprietà sono godute da $\frac{1}{r}$; essa rappresenta inoltre la funzione potenziale di una materia distribuita sulla superficie della sfera colla densità $u : 4\pi a$. (Vedi Cap. 2°).

Riguardiamo r e quindi v come funzione di ρ; poichè

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - 2 \sum x x_1,$$

con un breve calcolo si trova

$$\frac{1}{r} + 2\rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} = \frac{a^2 - \rho^2}{r^3},$$

e quindi

$$u(x_1, y_1, z_1) = v + 2\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}; \tag{22}$$

la quale fa dipendere la costruzione della u da quella della funzione potenziale v.

Per risolvere il problema dei valori al contorno per le funzioni biarmoniche potremmo valerci delle (15) e (15′) dove però G_2 è data da (18) o (18′).

Seguiremo invece un metodo più semplice.

Premettiamo il seguente utilissimo teorema.

Se u soddisfa la $\Delta_2 = 0$, anche

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}, \quad \text{ecc.},$$

soddisfano la stessa $\Delta_2 = 0$.

È

$$\rho^2 = x_1^2 + y_1^2 + \ldots$$

Quindi

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} = \sum x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1};$$

e poichè

$$\Delta_2 \left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta_2 x_1 + x_1 \Delta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},$$

risulta

$$\Delta_2 \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = 2 \Delta_2 u = 0.$$

Osservando poscia che

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \rho \frac{\partial u}{\partial \rho},$$

risulta pure

$$\Delta_2\left(\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right) = 0; \text{ ecc.}$$

Se u' ed u'' sono funzioni regolari insieme colle loro derivate prime, ecc. in tutto il cerchio (sfera), e soddisfano la $\Delta_2 = 0$, la funzione

$$u(x_1, y_1, z_1) = u' + (\rho^2 - a^2)\, u'' \tag{23}$$

è biarmonica.

Infatti essa è regolare colle sue derivate e inoltre

$$\Delta_2\, u = 6\, u'' + 4\, \rho \sum \frac{\partial u''}{\partial x_1} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} = 6\, u'' + 4\, \rho \frac{\partial u''}{\partial \rho},$$

$$\Delta_4\, u = 0.$$

Supponiamo ora di conoscere al contorno i valori di u e della sua derivata normale. Per $\rho = a$, $u = u'$ e poichè u è noto al contorno, applicando la (19'), avremo

$$u' = \frac{a^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u\, d\theta}{r^2}.$$

La u' così determinata è regolare colle derivate di qualsivoglia ordine.

Deriviamo ora la (23);

$$\frac{du}{dn} = -\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\left(\frac{\partial u'}{\partial \rho} + 2\rho u'' + (\rho^2 - a^2) \frac{\partial u''}{\partial \rho}\right),$$

$$\left(\frac{du}{dn}\right)_{\rho=a} = -\left(\frac{\partial u'}{\partial \rho} + 2\, a\, u''\right)_{\rho=a} = -\left(2\, a\, u'' + \frac{1}{a} \rho \frac{\partial u'}{\partial \rho}\right)_{\rho=a}.$$

Ma la funzione

$$2\,a\,u'' + \frac{1}{a}\,\rho\,\frac{\partial\,u'}{\partial\,\rho}$$

è regolare con tutte le sue derivate, soddisfa la $\Delta_2 = 0$ e al contorno assume valori dati ed eguali a $-\dfrac{d\,u}{d\,n}$; quindi, sempre in virtù della (19′), si ha:

$$2\,a\,u'' + \frac{1}{a}\,\rho\,\frac{\partial\,u'}{\partial\,\rho} = -\,\frac{a^2-\rho^2}{2\,\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\dfrac{d\,u}{d\,n}}{r^2}\,d\,\theta\,,$$

la quale ci farà conoscere u''; cioè

$$u'' = -\,\frac{a^2-\rho^2}{4\,\pi\,a}\int_0^{2\pi}\frac{\dfrac{d\,u}{d\,n}}{r^2}\,d\,\theta - \frac{1}{4\,\pi\,a^2}\int_0^{2\pi}\rho\,\frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\frac{a^2-\rho^2}{r^2}\right)u\,d\,\theta.$$

D'altra parte

$$\frac{2\,a^2}{r^2} + \rho\frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\frac{a^2-\rho^2}{r^2}\right) = \frac{2\,(a^2-\rho^2)}{r^4}\,a\,\{a-\rho\cos(\theta-\alpha)\},$$

dunque infine otteniamo

$$\left.\begin{aligned} u = {} & \frac{(a^2-\rho^2)^2}{2\,\pi\,a}\int_0^{2\pi}\frac{a-\rho\cos(\theta-\alpha)}{r^4}\,u\,d\,\theta\,+ \\ & + \frac{(a^2-\rho^2)^2}{4\,\pi\,a}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\,\frac{d\,u}{d\,n}\,d\theta. \end{aligned}\right\}\quad(24)$$

Tale metodo si può generalizzare per risolvere il problema dei valori al contorno per le funzioni poliarmoniche nel cerchio (sfera), cogniti al contorno i valori di u e della prima, seconda, ecc. derivata normale.

Basta porre

$$u = u' + (\rho^2 - a^2)\, u'' + (\rho^2 - a^2)^2\, u''' + \ldots$$

essendo u', u'', u'''... regolari con le loro derivate e soddisfacenti alla $\Delta_2 = 0$.

Sussiste del resto il teorema generale: *una funzione regolare in uno spazio ove soddisfa la* $\Delta_{2n} = 0$, *si può in generale rappresentare mediante n funzioni regolari che soddisfano la* $\Delta_2 = 0$ *.

§ 12. Risoluzione del problema dei valori al contorno per un semipiano o semispazio infinito. — I ragionamenti fatti per stabilire le formule (10), (10′) ecc., suppongono finito il campo S in cui la u è definita.

Nel caso che il campo sia indefinitamente esteso e la u sia armonica la (10) è ancora applicabile se:

1° la u si annulla col tendere di M_1 all'infinito;

---

* La formola (24) è dovuta al prof. LAURICELLA, *Atti R. Acc. d. Sc. di Torino*, **31**; 1896.

Il metodo seguito è quello indicato dal prof. VOLTERRA, ibidem; ed è stato generalizzato dal prof. ALMANSI, ibidem e *Annali di Matem.*, **2** (**3**); 1898, al quale è pure dovuto il notevole teorema in fine del §.

2° si ha sempre

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|, \ldots \qquad < \frac{\mathbf{M}}{R^2}$$

dove **M** è una quantità finita, R la distanza di un punto fisso dal punto M_1.

Queste condizioni diconsi brevemente "*condizioni di convergenza all'infinito*".

Centro in un punto O descriviamo con raggio R un cerchio σ_1 abbastanza grande e tale che contenga σ nel suo interno. Al campo compreso tra σ e σ_1 possiamo applicare la (10) ed avremo

$$2\pi u(x_1, y_1) = \int \left(u \frac{d \log \frac{1}{r}}{d n} - \log \frac{1}{r} \frac{d u}{d n} \right) d\sigma -$$

$$- \int \left(u \frac{d \log \frac{1}{r}}{d R} - \log \frac{1}{r} \frac{d u}{d R} \right) d\sigma_1,$$

n essendo la normale volta verso l'esterno del campo racchiuso da σ.

Ma

$$\int u \frac{d \log \frac{1}{r}}{d R} d\sigma_1 = - \int \frac{u}{r} \frac{d r}{d R} d\sigma_1 =$$

$$= - \int_0^{2\pi} u \frac{R}{r} \cos(R, r) \, d\omega,$$

e poichè col tendere di R all'infinito $R : r$ tende ad 1 ed u a zero, così il limite dell'integrale precedente è nullo.

Inoltre

$$\left|\frac{du}{dR}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dR} + \ldots\right| < \frac{2\,\mathbf{M}}{R^2}$$

$$\left|\int \log\frac{1}{r}\,\frac{du}{dR}\,d\sigma_1\right| < 2\,\mathbf{M}\left|\int_0^{2\pi}\frac{\log r}{R}\,d\omega\right|$$

ma

$$\frac{\log r}{R} = \frac{\log r}{r}\cdot\frac{r}{R}$$

tende a zero col tendere di R (e quindi di r) all'infinito. Dunque anche questo integrale tende a zero; e la (10) risulta quindi applicabile al campo infinito esterno a σ. Lo stesso ragionamento si applica alla (10').

Consideriamo un semipiano limitato dall'asse x: l'asse z sia normale a questo e positivo nell'interno del campo. *Si vuol determinare in M_1 il valore di una funzione armonica u che soddisfa alle condizioni di convergenza all'infinito, cogniti i valori che essa prende al contorno cioè sull'asse x.* Dovremo applicare la (13): notiamo che

$$\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} = -\frac{d\log r}{dz} = -\frac{z - z_1}{r^2};$$

$$\frac{dG_1}{dn} = -\frac{d\log r_1}{dz} = -\frac{z + z_1}{r_1^2};$$

quindi al contorno, cioè per $z = 0$,

$$\frac{d}{dn}\left(\log\frac{1}{r} - G_1\right) = \frac{2z_1}{r^2} = -2\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial z_1},$$

onde

$$u(x_1, z_1) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{-\infty}^{+\infty} u \log\frac{1}{r}\, dx. \qquad (25)$$

Per un semispazio limitato dal piano xy si ha analogamente

$$u(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int \frac{u\, d\sigma}{r}. \qquad (25')$$

Il problema dei valori al contorno per le funzioni biarmoniche si risolve ponendo

$$u(x_1, z_1) = u' + z_1 u''$$

dove u', u'' sono regolari colle derivate prime, ecc. e soddisfano la $\Delta_2 u = 0$. Poi si procede come per la (23).

Per tali campi si può facilmente risolvere *il problema della determinazione di una funzione armonica allorchè sono dati al contorno i valori della derivata normale.*

Si può infatti osservare che in tal caso la funzione G che figura nella (16) è definita, a meno di una costante, da:

$$\frac{dG}{dz} = \frac{d\log\frac{1}{r}}{dz} \quad \text{per } z = 0,$$

e si vede subito che è

$$G = -\log \frac{1}{r_1};$$

quindi la (16) ci dà:

$$u(x_1, z_1) = -\frac{1}{\pi}\int \frac{d u}{d n} \log \frac{1}{r} d\sigma. \qquad (26)$$

Nel caso di un semispazio abbiamo invece:

$$u(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d u}{d n} \frac{d\sigma}{r}. \qquad (26')$$

§ 13. Di una trasformazione in sè stessa della equazione $\Delta_{2n} = 0$. — Alle variabili $x, y, \ldots$ che figurano nella u sostituiamone altre $x_1, y_1 \ldots$, ponendo

$$x = x(x_1, y_1, \ldots); \; y = y(x_1, y_1, \ldots); \text{ ecc.}$$

Diciamo u_1 la trasformata di u e poniamo

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \ldots$$

$$\Delta_2 u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} + \ldots$$

Per quali trasformazioni il $\Delta_2 u$ si trasforma in $\Delta_2 u_1$?

Per brevità di scrittura supponiamo si tratti di due variabili sole.

Nel piano $x_1 y_1$ le $x_1 = \text{cost}$, $y_1 = \text{cost}$, indivi-

duano un sistema di coordinate curvilinee che noi supporremo ortogonali. Poichè

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x}{\partial y_1} dy_1, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial y_1} dy_1, \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

l'elemento lineare del piano xy assumerà la forma:

$$ds^2 = Q_1^2 dx_1^2 + Q_2^2 dy_1^2$$

dove:

$$\left.\begin{aligned} Q_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2, \\ Q_2^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y_1}\right)^2, \\ 0 &= \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial y_1}. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Dalle prime due si ricava ancora:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\frac{\partial y}{\partial x_1}, \\ Q_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial y}{\partial y_1}. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Moltiplicando rispettivamente le (27) per $\frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_1}$

e sommando, tenendo presenti le (28), risulta

$$Q_1^2 dx_1 = \frac{\partial x}{\partial x_1} d x + \frac{\partial y}{\partial x_1} d y.$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial x} &= \frac{1}{Q_1^2}\frac{\partial x}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{1}{Q_1^2}\frac{\partial y}{\partial x_1}; \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} &= \frac{1}{Q_2^2}\frac{\partial x}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{1}{Q_2^2}\frac{\partial y}{\partial y_1}. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Di qui:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2} = \frac{1}{Q_1^2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}\right) -$$

$$- \frac{2}{Q_1^3}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial x_1},$$

cioè, in virtù delle (30),

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2} = \frac{1}{Q_1^2}\left(\frac{1}{Q_1^2}\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{1}{Q_2^2}\frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial x}{\partial y_1}\right) -$$

$$- \frac{2}{Q_1^3}\left(\frac{1}{Q_1^2}\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{1}{Q_2^2}\frac{\partial Q_1}{\partial y_1}\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)\frac{\partial x}{\partial x_1}$$

ed una espressione analoga cambiando x in y.

Dunque sommando e tenendo presenti le (28) e (29) risulta

$$\Delta_2 x_1 = \frac{1}{Q_1^2}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial x_1}\right) - \frac{2}{Q_1^3}\frac{\partial Q_1}{\partial x_1},$$

cioè:

$$\Delta_2 x_1 = \frac{1}{Q_1 Q_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right).$$

Notiamo poi che dalle (28) e (30) si ricava

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{Q_1^2} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)^2, \\ \frac{1}{Q_2^2} &= \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)^2, \\ 0 &= \frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Ciò posto, avendosi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial x} +$$

$$+ \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2} + \ldots$$

otteniamo:

$$\Delta_2 u = \frac{1}{Q_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta_2 x_1 + \ldots,$$

e poichè nel caso generale di più variabili:

$$\Delta_2 x_1 = \frac{1}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{Q_2 Q_3 \ldots Q_n}{Q_1}\right),$$

così

$$\Delta_2 u = \frac{1}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{Q_2 Q_3 \ldots Q_n}{Q_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \ldots\right\} \qquad (32)$$

che dà la celebre trasformazione del Δ_2 in coordinate curvilinee ortogonali di Lamé.

Nel caso di due variabili perchè il $\Delta_2 u$ si trasformi nel $\Delta_2 u_1$ è necessario e basta che

$$Q_1 = Q_2 = Q\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right) = 0\,,$$

le quali ultime sono conseguenza delle prime. In tal caso:

$$\Delta_2 u = \frac{1}{Q^2}\Delta_2 u_1\,,$$
$$d s = Q\, d s_1\,.$$

La trasformazione richiesta è una trasformazione conforme; se quindi la u è armonica in un campo, la u_1 sarà armonica nel campo trasformato. Dunque: *se sapremo risolvere il problema dei valori al contorno per un'area piana, lo sapremo del pari risolvere per tutte le aree piane rappresentabili in modo conforme sulla prima; e quindi per tutte le aree che si sanno rappresentare in modo conforme su di un cerchio (o su di un semipiano).*

Nello spazio a tre dimensioni posto:

$$d s^2 = Q_1^2\, d x_1^2 + Q_2^2\, d y_1^2 + Q_3^2\, d z_1^2,$$

risulta

$$\Delta_2 u = \frac{1}{Q_1 Q_2 Q_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{Q_2 Q_3}{Q_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \ldots\right\};$$

e perchè $\Delta_2 u$ si trasformi in $\Delta_2 u_1$, è necessario

e basta che

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{Q_2\,Q_3}{Q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{Q_3\,Q_1}{Q_2}\right) = \ldots \quad = 0.$$

Queste ultime equivalgono a:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial y_1} = \frac{\partial Q}{\partial z_1} = 0$$

cioè $Q = \text{cost} = c$; quindi

$$d\,s = c\,d\,s_1,$$

la trasformazione è una similitudine e non dà quindi nulla di nuovo.

Se fosse semplicemente:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$$

avremmo una trasformazione conforme dello spazio e questa, per un noto teorema di Liouville *, è necessariamente *il risultato di una trasformazione per raggi vettori reciproci e di trasformazioni lineari.*

In tal caso, se r ed r_1 indicano le distanze di due punti corrispondenti dall'origine, si ha

$$d\,s : d\,s_1 = r : r_1\,,$$

$$Q = \frac{1}{r_1^{\,2}}.$$

---

* Liouville nella *Note VI des Applications de l'Analyse à la Géométrie de Monge*, segue un metodo diretto ed analitico fondato sulla integrazione di un sistema analogo al (28). Tra le molte dimostrazioni di questo teorema è assai notevole quella del prof. Capelli: *Annali d. Matem.*, **14**, (2); 1886.

supposta eguale ad uno la potenza dell'inversione.

Ciò posto il Painlevé * ha proposto e risoluto il seguente problema generale:
determinare tre funzioni x_1, y_1, z_1, *di* x, y, z *ed una funzione* F *di* u, x, y, z *colla condizione che sostituendo* x_1 *ecc. in* $x, y \ldots$ *nella* u *(che soddisfa la* $\Delta_2 = 0$*) anche la* F *soddisfi la* $\Delta_2 = 0$.

Si può dimostrare che la trasformazione non può essere che una inversione e inoltre

$$F = \frac{u_1}{r_1},$$

ritrovando così una nota proprietà scoperta da Thomson (Lord Kelvin).

Per la verifica diretta di questa basta notare che, per la (32),

$$\Delta_2 u = r_1^4 \Delta_2 u_1 - 2 r_1^3 \sum \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial r_1}{\partial x_1}.$$

Ma

$$\Delta_2 \left(\frac{u_1}{r_1}\right) = \frac{1}{r_1} \Delta_2 u_1 - \frac{2}{r_1^2} \sum \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial r_1}{\partial x_1};$$

donde:

$$\Delta_2 u = r_1^5 \Delta_2 \left(\frac{u_1}{r_1}\right);$$

la quale esprime che se u soddisfa la $\Delta_2 u = 0$,

* Painlevé: *Travaux et Mem. d. Facultés de Sc. de Lille*, 1; 1889.

la $\frac{u_1}{r_1}$ soddisfa la stessa equazione nello spazio trasformato.

I risultati precedenti si estendono facilmente al caso di $n \geqq 3$ variabili. In tal caso si ha

$$\Delta_2 u = r_1^{2n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{r_1^{2n-4}} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \ldots \right\},$$

cioè

$$\Delta_2 u = r_1^4 \Delta_2 u_1 - 2(n-2) r_1^5 \sum \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial r_1}{\partial x_1};$$

inoltre:

$$\Delta_2 \left(\frac{u_1}{r_1^{n-2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{r_1^{n-2}} \Delta_2 u_1 - 2(n-2) \frac{1}{r_1^{n-3}} \sum \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial r_1}{\partial x_1}.$$

Quindi

$$\Delta_2 u = r_1^{n+2} \Delta_2 \left(\frac{u_1}{r_1^{n-2}} \right);$$

se dunque la u è armonica, nello spazio trasformato per inversione sarà armonica la

$$u_1 : r^{n-2}.$$

Passiamo ora alle funzioni biarmoniche, e consideriamo nel piano una inversione (a potenza 1) definita dalle:

$$x_1 = x : r^2, \quad y_1 = y : r^2,$$

$$Q = \frac{1}{r_1^2} = r^2.$$

Quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = r^4 \Delta_2 u.$$

Se poniamo

$$u_1 = \frac{u}{r^2},$$

risulterà successivamente

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} = r^4 \Delta_2 \left(\frac{u}{r^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}\right)^2 = r^4 \Delta_2 \left\{r^4 \Delta_2 \left(\frac{u}{r^2}\right)\right\}.$$

Sviluppando il secondo membro si ha

$$r^4 \Delta_2 \left(\frac{u}{r^2}\right) = r^2 \Delta_2 u + 4u - 2 \sum \frac{\partial r^2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x},$$

e poscia:

$$\Delta_2 \left\{r^4 \Delta_2 \left(\frac{u}{r^2}\right)\right\} =$$

$$= r^2 \Delta_4 u + \Delta_2 u \, \Delta_2 r^2 + 2 \sum \frac{\partial r^2}{\partial x} \frac{\partial \Delta_2 u}{\partial x} + 4 \Delta_2 u$$

$$- 2 \left(\frac{\partial \Delta_2 r^2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \ldots\right) - 2 \left(\frac{\partial r^2}{\partial x} \frac{\partial \Delta_2 u}{\partial x} + \ldots\right)$$

$$- 4 \left(\frac{\partial^2 r^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) -$$

$$- 4 \left(\frac{\partial^2 r^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 r^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

e riflettendo che

$$\frac{\partial^2 r^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 r^2}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 r^2}{\partial x \partial y} = 0, \quad \Delta_2 r^2 = 4,$$

si ha infine

$$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}\right)^2 = r^6 \Delta_4 u$$

cioè:

se si combina una trasformazione per raggi vettori reciproci in un campo a due dimensioni, col cambiamento di funzione

$$u_1 = u : r^2,$$

l' equazione

$$\Delta_4 u = 0$$

è trasformata in sè stessa *.

Partendo quindi dal fatto ben noto che un'area σ compresa tra due circonferenze (o due sfere) non intersecantisi si può con una inversione trasformare in una corona circolare, si riconduce il problema dei valori al contorno per σ e per l'equazione $\Delta_2 = 0$ e $\Delta_4 = 0$ a quello della corona circolare (o sferica).

Il teorema precedente si può generalizzare nel seguente:

se u è una funzione di n variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, armonica di grado m e si fa una inversione defi-

---

* Levi-Civita: *Atti R. Ist. Veneto*, **9** (**7**); 1897-98. Vedi anche Boggio: ibidem, **59**; 1900.

nita dalle:

$$x'_i = x_i : r^2,$$

la funzione

$$u' = u : r^{2m-n}$$

sarà ancora armonica di grado m rispetto alle x'*.

E possiamo proporci un problema analogo a quello del Painlevé; cioè determinare n funzioni di $x_1, x_2, \ldots x_n$ che denoteremo con $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ e una funzione F di u (soddisfacente alla $\Delta_{2m} u = 0$) e delle $x_1, \ldots x_n$ colla condizione che se si sostituisce x_i' in luogo di x_i, la funzione

$$u' = F(u, x_1, x_2 \ldots x_n)$$

verifichi sempre l'equazione:

$$\Delta_{2m} u' = 0.$$

Si può dimostrare che, qualunque sia il numero delle variabili, la trasformazione è quella per inversione e quindi deve ricadersi nella soluzione precedente **.

---

* Volterra: *Sulle funzioni poliarmoniche*, Atti R. Ist. Veneto, **57**; 1899.

** Vedi una nota del dott. Boggio: ibidem, **59**; 1900, in cui il problema è risoluto benchè in una forma meno generale.

CAPITOLO SECONDO.

FUNZIONI POTENZIALI NEWTONIANE. *

§ 1. Funzione potenziale di una massa distribuita in uno spazio a tre dimensioni, attraente secondo la legge di Newton. — Una massa occupa uno spazio S ed ha nel punto (a, b, c) generico la densità k; essa attrae una massa unitaria posta in P (x, y, z) secondo la legge di Newton. Se intorno al punto (a, b, c) consideriamo un elemento di volume $d\,S$, la sua massa sarà $k\,d\,S$ e l'attrazione che esercita sull'unità di massa è espressa da

$$k\,d\,S : r^2$$

* Su questo capitolo si possono cfr. oltre i libri modernissimi del KORN, POINCARÉ e il libro già citato del BETTI, i seguenti:

DIRICHLET: *Vorlesungen über die im umgekehrten Verhäl. u. s. w.* Leipzig, 1876.

NEUMANN: *Untersuchungen über das logar. u. newt. Potential.* Leipzig, 1877.

DUHEM: *Leçons sur l'électricité et le magnétisme.* Paris, 1891, T. I. Il lettore desideroso di risalire alle fonti originali troverà in questo bel libro numerosissime citazioni e note storiche.

ed agisce secondo la congiungente il punto (a, b, c) con P che dicesi punto potenziato. I coseni direttori di questa congiungente essendo

$$\frac{a-x}{r}, \quad \frac{b-y}{r}, \quad \frac{c-z}{r},$$

le componenti dell'attrazione di tutta la massa sono espresse dalle:

$$\left.\begin{aligned} X &= \int \frac{k(a-x)}{r^3}\, dS, \\ Y = \int \frac{k(b-y)}{r^3}\, dS, \quad Z &= \int \frac{k(c-z)}{r^3}\, dS. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ora mostreremo che:
le componenti dell'attrazione sono le derivate, rispetto alle coordinate del punto potenziato, di una funzione

$$V(x, y, z) = \int \frac{k\, dS}{r}, \qquad (2)$$

la quale dicesi funzione potenziale della massa distribuita in S.

In V, nell'eseguire la integrazione, dovremo riguardare x, y, z come parametri fissi; a, b, c come variabili d'integrazione. La densità k, funzione dei punti (a, b, c) di S, è, pel suo stesso significato, sempre finita; ammetteremo inoltre che *sia integrabile lungo qualsivoglia retta uscente dal polo P.*

§ 2. Proprietà della funzione potenziale nello spazio esterno alla materia agente. — Il punto potenziato sia esterno allo spazio S occupato dalla

massa; la funzione

$$1 : r = 1 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

non diventa mai infinita; notando quindi che

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{a-x}{r^3}, \text{ ecc.}$$

risulta

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{3}$$

La V è monodroma, finita, continua insieme colle derivate di qualsivoglia ordine in tutto lo spazio esterno.

Supponiamo che P si allontani all'infinito; V e le sue derivate si annullano. Diciamo R la distanza di P da un punto fisso p. e. l'origine; si ha:

$$\lim_{R=\infty} \frac{R}{r} = 1,$$

quindi:

$$\lim R V = \int k \, d S = \mathbf{M} \tag{4}$$

indicando con $\mathbf{M}$ la massa attraente.

Inoltre:

$$R^2 \frac{\partial V}{\partial x} = \int \frac{a-x}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^2 k \, d S;$$

se quindi P si allontana all'infinito nella dire-

zione fissa definita dagli angoli α, β, γ si ha

$$\lim R^2 \frac{\partial V}{\partial x} = -\mathbf{M} \cos \alpha, \text{ ecc. . .} \tag{5}$$

Notiamo infine che

$$\Delta_2 V = \int k \, \Delta_2 \left(\frac{1}{r}\right) d S = 0; \tag{6}$$

dunque:
nello spazio esterno alla materia agente la funzione potenziale e le sue derivate di qualsivoglia ordine sono regolari: essa poi soddisfa l'equazione (6), *detta di Laplace; col tendere del punto potenziato all'infinito,* $R\,V$, $R^2 \frac{\partial V}{\partial x}$, *ecc. tendono verso limiti finiti.*

§ **3. Proprietà della funzione potenziale nello spazio occupato dalla materia agente.** — Il punto potenziato P faccia parte della massa: la funzione $\frac{1}{r}$ diventa infinita in P, e le considerazioni del § precedente non sono più valide. Vediamo se seguitano a sussistere le proprietà.

Escludiamo P, che può giacere infinitamente vicino od anche sul contorno, da S con uno spazio S_0 nel cui interno sia P; diciamo S_1 lo spazio restante; V_0, V_1 rispettivamente il valore in P della funzione potenziale dei due spazi S_0 ed S_1: avremo

$$V = V_0 + V_1.$$

P essendo esterno ad S_1, la V_1 è regolare; esaminiamo V_0.

Centro in P descrivo una sfera di raggio 1; su questa assumo un elemento d'area $d\omega$ che proietto da P; assumiamo quindi per elemento $d S_0$ lo spazio distaccato sul cono proiettante da due sfere di raggi r e $r + d r$; cioè

$$d S_0 = r^2 d\omega d r;$$

quindi:

$$V_0 = \int d\omega \int k r d r$$

è sempre finita e però anche V *è sempre finita.* Dico che è anche continua. Siano k_0 ed r_0 rispettivamente i limiti superiori di k ed r in S_0: sarà

$$| V_0 | \leq 2 \pi k_0 r_0^2.$$

Consideriamo un altro punto P' contenuto in S_0, ma che potrebbe anche essere esterno ad S; avremo pure

$$| V'_0 | \leq 2 \pi k_0 r_0^2,$$

onde:

$$| V_0 - V'_0 | \leq 4 \pi k_0 r_0^2$$

e perchè S_0 può supporsi arbitrariamente piccolo avremo ancora che, scelto ε piccolo ad arbitrio, si ha

$$| V_0 - V'_0 | < \varepsilon$$

dunque la funzione V_0 e quindi V è continua in tutto S ed anche attraverso la superficie limite.

Quanto alle derivate prime dico che esse sono ancora regolari e rappresentano sempre le componenti dell'attrazione.

Decomponiamo infatti la X ad es. come la V; cioè:

$$X = X_1 + X_0.$$

Sarà intanto

$$X_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x}.$$

Per calcolare X_0 osservo che l'azione elementare di un elemento di S_0 su P essendo $k\,d\,S_0 : r^2$, la sua componente secondo x è

$$X_0 = \int \frac{k \cos \alpha}{r^2}\, d\,S_0 = \int d\,\omega \int k \cos \alpha\, d\,r:$$

dunque X_0, e in conseguenza X, è finita. Procedendo come prima si ha

$$|X_0| \leq 4\,\pi\, k_0\, r_0,$$

$$|X_0 - X'_0| \leq 8\,\pi\, k_0\, r_0$$

cioè X_0, e quindi X è continua in tutto S_0 ed anche attraverso la superficie limite. Inoltre:

$$X_0 = \int \frac{k\,(a - x)}{r^3}\, d\,S_0,$$

dunque

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}; \text{ ecc.} \ldots$$

la funzione potenziale è finita e continua insieme colle derivate prime in tutto lo spazio ed anche attraverso la superficie limite; le derivate prime rappresentano sempre le componenti dell'attrazione.

Prima di passare alla considerazione delle derivate seconde, premettiamo la ricerca della:

§ 4. Funzione potenziale di una sfera omogenea. — La densità costante sia k; a il raggio della sfera; $OP = \rho$, $OM = u$, M essendo il punto variabile nell'interno della sfera. Scelgo un sistema di coordinate polari con OP per asse polare; sia θ la colatitudine MOP e φ la longitudine.

L'elemento del raggio vettore è du; l'elemento del meridiano è $u\,d\theta$; l'elemento del parallelo infine è $u \operatorname{sen}\theta\, d\varphi$; quindi

$$dS = u^2 \operatorname{sen}\theta\; du\, d\theta\, d\varphi.$$

La distanza variabile r tra P ed M è data da

$$r^2 = u^2 + \rho^2 - 2\,u\,\rho\cos\theta.$$

Quindi:

$$V = k \int_0^a \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{u^2 \operatorname{sen}\theta\; du\; d\theta\; d\varphi}{\sqrt{u^2 + \rho^2 - 2\,u\,\rho\cos\theta}}.$$

Le integrazioni rispetto a φ e a θ si eseguiscono facilmente e ci danno

$$V = \frac{2\pi k}{\rho} \int_0^a u \left\{ u + \rho - \sqrt{(u-\rho)^2} \right\} du,$$

perchè:

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\sqrt{u^2+\rho^2-2\,u\,\rho\cos\theta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho\, u}\left(\sqrt{u^2+\rho^2-2\,u\,\rho\cos\theta}\right)_0^\pi = \frac{u+\rho-\sqrt{(u-\rho)^2}}{u\,\rho}.$$

Conviene distinguere due casi.

Se P è esterno alla sfera, $\rho > a$; quindi

$$\sqrt{(u-\rho)^2} = \rho - u$$

e

$$V_e = \frac{4\,\pi\,k}{\rho}\int_0^a u^2\, d\,u = \frac{4\,\pi\,k\,a^3}{3\,\rho},$$

$$V_e = \frac{4}{3}\,\pi\,k\,a^3\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (7)$$

Se in tal caso supponessimo concentrata nel centro della sfera tutta la sua massa, la funzione potenziale sarebbe la stessa; dunque:
l'attrazione che una sfera omogenea esercita su di un punto esterno è la stessa di quella esercitata da tutta la massa concentrata nel centro della sfera.

Se P è interno alla sfera, $\rho < a$; conviene spezzare l'integrale tra 0 e ρ e tra ρ ed a, cioè:

$$V_i = \frac{2\,\pi\,k}{\rho}\int_0^\rho u\,\{u+\rho-\sqrt{(u-\rho)^2}\}\, d\,u +$$

$$+ \frac{2\,\pi\,k}{\rho}\int_\rho^a u\,\{u+\rho-\sqrt{(u-\rho)^2}\}\, d\,u.$$

Il primo, essendo $\sqrt{(u-\rho)^2}=\rho-u$, ha per valore $\frac{4}{3}\pi k \rho^2$; nel secondo invece $\sqrt{(u-\rho)^2}=u-\rho$, essendo u sempre maggiore di ρ; il suo valore è quindi

$$2\pi k (a^2-\rho^2).$$

Dunque:

$$V_i = 2\pi k\left(a^2 - \frac{1}{3}\rho^2\right) = 2\pi k\left(a^2 - \frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right). \quad (7')$$

Coi valori (7) ed (7') è facile verificare che V è finita e continua in tutto lo spazio insieme colle sue derivate prime anche attraverso la superficie della sfera. Le derivate seconde sono finite e continue sia all'interno che all'esterno della sfera ma presentano una discontinuità attraverso la superficie. Infatti:

$$\left(\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2}\right)_\sigma = \frac{4}{3}\pi k a^3\left(\frac{3x^2}{a^5} - \frac{1}{a^3}\right),$$

mentre

$$\left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}\right)_\sigma = -\frac{4}{3}\pi k.$$

Notando poi che

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\pi k, \text{ ecc.}$$

si deduce

$$\Delta_2 V_i = -4\pi k. \quad (8)$$

§ 5. Derivate seconde della funzione potenziale. Formula di Poisson. — Supponiamo anzitutto lo

spazio S riempito di una materia omogenea di densità k e il punto potenziato sia interno alla massa. Isoliamolo con una sfera S_0 di raggio qualunque, ma contenuta in S; sarà

$$V_i = V_0 + V_1$$

e poichè P è esterno allo spazio restante sarà, per la (6) e la (8),

$$\Delta_2 V_i = -4\pi k.$$

Dunque la (8) è valida per qualunque spazio nell'ipotesi della densità costante ed esistono in tal caso le derivate seconde anche nei punti interni. Passiamo ora al caso generale.

Per le derivate prime, qualunque sia la posizione del punto potenziato, si ha

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d S.$$

Se poi il punto è esterno:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int k \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} d S, \text{ ecc.}$$

si può cioè eseguire la derivazione sotto il segno integrale.

Se il punto potenziato è interno ciò non è più possibile; ed è facile convincersene. Si ha

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{a-x}{r^3}; \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(a-x)^2}{r^5} = \frac{3\cos^2\alpha - 1}{r^3},$$

$$d S = r^2 d r d \omega.$$

Se quindi la formula precedente seguitasse a sussistere, dovremmo avere

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int_\omega (3\cos^2\alpha - 1)\, d\omega \int_0 \frac{k\, dr}{r}. \qquad (9)$$

L'integrale rispetto ad r suppone sia fissato l'elemento $d\omega$ ed eseguita l'integrazione tra 0 e un certo valore di r fissato dal contorno.

Questo integrale deve essere certamente finito: dunque $\lim_{r=0} k = 0$, cioè non dovremmo aver massa nel punto P e ciò, in generale, non è.

Sia k_0 la densità in P ed ammettiamo, oltre l'ipotesi del § 1.°, *la integrabilità di* $\frac{|k - k_0|}{r}$ *su ogni raggio uscente da* P; perciò è necessario che k sia continua in P, senza però che sia necessaria l'esistenza della derivata di k.

Diciamo V_0 la funzione potenziale di una materia che occupa lo spazio S con densità k_0; avremo

$$V_0 = k_0 \int \frac{dS}{r},$$

$$V_i = V_0 + \int \frac{k - k_0}{r}\, dS.$$

Derivando:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \frac{\partial V_0}{\partial x} - \int (k - k_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\, dS.$$

Dico che l'integrale ha una derivata determinata e finita rispetto x. Riceva infatti x l'incremento h per cui r diventi r_1; il rapporto incrementale di

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} = \frac{x-a}{r^3},$$

è dato da

$$\frac{1}{r^3} + \frac{x+h-a}{h}\left(\frac{1}{r_1{}^3} - \frac{1}{r^3}\right);$$

oppure, notando che

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = -\frac{2h(x-a)+h^2}{r\,r_1(r+r_1)},$$

da

$$\frac{1}{r^3} - \frac{R(x+h-a)}{r\,r_1(r+r_1)}\{2(x-a)+h\},$$

dove:

$$R = \frac{1}{r_1{}^2} + \frac{1}{r\,r_1} + \frac{1}{r^2}.$$

Moltiplichiamo per $k - k_0$ ed integriamo allo spazio S.

In virtù della ipotesi fatta i tre integrali sono finiti qualunque sia h; ad esempio, pel secondo, basta riflettere che

$$\frac{x-a}{r+r_1} \cdot \frac{x+h-a}{r_1} < 1;\ |R| < \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r_1{}^2} + \frac{1}{r^2}\right).$$

Passando poscia al limite per $h = 0$, la derivata dell'integrale risulta eguale a

$$\int (k-k_0)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3(x-a)^2}{r^5}\right)dS = -\int (k-k_0)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial a^2}\,dS$$

e questa, per quanto è stato detto in principio, è certamente finita. Dunque esiste la derivata seconda di V ed è data da

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \int (k-k_0)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial a^2}\,dS;^* \qquad (10)$$

e per le altre derivate avremo formule analoghe.

Se la condizione rispetto k è soddisfatta in tutto S, le derivate sono quivi sempre continue.

Sommando la (10) e le equazioni analoghe, per ciò che fu dimostrato in principio del §, si otterrà

$$\Delta_2 V_i = \Delta_2 V_0 = -4\pi k_0 \qquad (11)$$

formula celebre di Poisson.

§ **6. Discontinuità delle derivate seconde.** — Le derivate seconde sono continue sia nello spazio

---

* Queste formule, lievemente modificate, sono del prof. MORERA, *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di spazio.* Rend. R. Ist. Lombardo, **20**; 1887. Vedi anche MAGGI, *Sulle proprietà fondamentali della funzione potenziale*, ecc. *Nuovo Cimento*, **33**; 1893.

esterno che nello interno; ma i loro valori non si continuano attraverso la superficie.

Infatti mentre all'esterno la V soddisfa all'equazione di Laplace; all'interno soddisfa a quella di Poisson. Vogliamo ora determinare queste discontinuità.

In un punto P di σ esista la normale e sia positiva verso lo spazio occupato da masse: su questa assumiamo un segmento $PP_1 = n$ e nella direzione opposta un altro eguale e contrario $PP_2 = -n$.

Accenniamo con u e con v una qualunque delle variabili x, y, z; e rispettivamente con

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial u\, \partial v}\right)_n, \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u\, \partial v}\right)_{-n}$$

i valori di una derivata seconda in P_1 ed P_2. Questi due punti mantenendosi rispettivamente su n e $-n$, tendano verso P; dovremo trovare

$$\lim_{n=0}\left\{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial u\, \partial v}\right)_n - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u\, \partial v}\right)_{-n}\right\}.$$

Per la continuità delle derivate prime di V anche attraverso σ, l'equazione

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_n - \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_{-n} = 0,$$

in cui per semplicità di scrittura si è tolta la notazione di $\lim\limits_{n=0}$, deve essere soddisfatta per ogni punto di σ. Poniamo in questa in luogo di x, y, z,

le coordinate $x + dx, \ldots$ di un punto infinitamente prossimo sulla stessa σ; avremo

$$\Sigma \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial u \, \partial x} \right)_n - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u \, \partial x} \right)_{-n} \right] dx = 0,$$

che, in generale, non è identicamente soddisfatta. Sia $F(x, y, z) = 0$ l'equazione di σ; per lo stesso spostamento sarà pure

$$\Sigma \frac{\partial F}{\partial x} dx = 0,$$

che deve sussistere insieme colla precedente. Se queste due equazioni fossero distinte lo spostamento non sarebbe più arbitrario; dunque sono identiche; cioè

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial u \, \partial x} \right)_n - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u \, \partial x} \right)_{-n} = \frac{\partial F}{\partial x} = U \cos(n, x)$$

e due equazioni analoghe; U è un fattore di proporzionalità dipendente da u.

Il secondo membro non muta cambiando u con x; se quindi diciamo X, Y, Z ciò che rispettivamente diventa U quando si muti u in x, y, z; avremo

$$U \cos(n, x) = X \cos(n, u)$$

cioè:

$$\frac{X}{\cos(n, x)} = \frac{U}{\cos(n, u)}$$

cioè il primo rapporto non cambia se si sostituisce x con una qualunque delle variabili x, y, z; esso

è dunque una costante h; e però in generale:

$$\lim_{n=0}\left\{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial v}\right)_n - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial v}\right)_{-n}\right\} = h\cos(n,u)\cos(n,v). \quad (12)$$

Per determinare la costante h osserviamo che in ogni punto interno, per la (11), si ha

$$\lim_{n=0}(\Delta_2 V)_n = -4\pi k$$

se k è la densità nel punto P. All'esterno invece, per la (6)

$$\lim_{n=0}(\Delta_2 V)_{-n} = 0.$$

Facciasi ora nella (12) $u = v = x, y, z$ e si sommino le equazioni ottenute; per le relazioni precedenti risulta

$$h = -4\pi k;$$

dunque:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n=0}\left\{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial v}\right)_n - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial v}\right)_{-n}\right\} = \\ = -4\pi k\cos(n,u)\cos(n,v)\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

la quale determina le discontinuità, attraverso σ, *di tutte le derivate seconde* *.

§ **7. Caratteristiche della funzione potenziale. Teorema di Dirichlet.** — Riassumendo dunque: *la funzione potenziale di una materia distribuita in uno spazio a tre dimensioni, e la cui densità soddisfa alle condizioni enunciate,*

---

* La formula è dovuta al sig. WEINGARTEN: *Zur Theorie des Flächenpotentials, Acta Mathematica*, **10**; 1887.

1° *è monodroma, finita e continua insieme colle sue derivate prime in tutto lo spazio;*

2° *le sue derivate seconde sono continue all'interno ed all'esterno delle masse attraenti, ma discontinue attraverso la superficie;*

3° *all'esterno soddisfa l'equazione di Laplace; all'interno quella di Poisson;*

4° *all'infinito essa e le sue derivate tendono a zero, ma i limiti di*

$$R\,V,\ R^2 \frac{\partial V}{\partial u},$$

col tendere di R all'infinito, sono finiti.

Queste proprietà sono caratteristiche per la funzione V, e servono ad individuarla; in altre parole:

la funzione V, soddisfacente alle proprietà suddette, può essere sempre riguardata come la funzione potenziale di una massa distribuita in S colla densità

$$-\frac{\Delta_2 V}{4\pi}.$$

Immaginiamo infatti in S una tale distribuzione di masse; e sia V' la funzione potenziale la quale certamente godrà di tutte le enunciate proprietà. Basta dunque dimostrare che essa non può essere diversa da V. Pongasi infatti

$$U = V - V';$$

sarà U monodroma finita e continua insieme colle sue derivate prime in tutto lo spazio. Inoltre sarà pure sempre

$$\Delta_2 U = 0,$$

eccetto nei punti di σ, in cui non ha significato. Racchiudiamo S entro una sfera S_0 di raggio R sufficientemente grande. Allo spazio S_0 sarebbe applicabile il primo lemma di Green (Cap. 1°, form. 4) se il $\Delta_2 U$ avesse in ogni punto un valore determinato; i punti di σ facendo eccezione, converrà racchiudere σ entro due superficie σ', σ'' sufficientemente vicine a σ; da S_0 risulta quindi un nuovo spazio S' il cui contorno è costituito da σ', σ'', σ_0 (potendo le prime due comporsi anche di più pezzi), in cui il lemma suddetto, certamente applicabile, ci dà:

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d S' + \int U \frac{d U}{d n_0} d \sigma_0 +$$

$$+ \int U \frac{d U}{d n'} d \sigma' + \int U \frac{d U}{d n''} d \sigma'' = 0 .$$

Facciamo anzitutto tendere σ' e σ'' verso σ: su σ la U e le sue derivate prime sono continue ed essendo opposte le due direzioni n' ed n'', al limite abbiamo

$$\frac{d U}{d n'} + \frac{d U}{d n''} = 0 .$$

Dunque la somma dei due ultimi integrali tende a zero. Del resto si è fatta tale considerazione per maggior chiarezza; ma, a rigore, era superflua.

Di più si ha

$$\int U \frac{d U}{d n} d \sigma_0 = - \frac{1}{R} \int R\, U . R^2 \frac{d U}{d R} d \omega ;$$

ma col tendere di R all'infinito, $R\,U$, $R^2 \dfrac{d\,U}{d\,R}$ hanno limiti finiti, così anche quell'integrale tende a zero. Quindi:

$$\int \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\,S_\infty = 0$$

l'integrazione essendo estesa a tutto lo spazio. Si deduce perciò

$$U = \text{cost.}$$

e dovendo annullarsi all'infinito, sarà sempre $U = 0$ e quindi

$$V = V'.\,*$$

§ 8. Funzione potenziale di un ellissoide omogeneo. — Le proprietà dei § precedenti permettono di dare un altro metodo per la ricerca della funzione potenziale di una sfera omogenea di densità eguale ad 1. Notiamo che l'espressione del Δ_2 in coordinate sferiche, conforme alla trasformazione di Lamé [Cap. 1°; form. (32)], è:

$$\Delta_2\, V = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) \right\}.$$

---

* Dirichlet: lib. citato, p. 32.

Nel caso attuale, V essendo funzione della sola distanza ρ del punto potenziato dal centro, abbiamo

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dV}{d\rho} \right).$$

Quindi per lo spazio esterno:

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d V_e}{d\rho} \right) = 0$$

cioè:

$$V_e = \frac{c}{\rho} + c'$$

e siccome per $\rho = \infty$, $V_e = 0$; $\lim\limits_{\rho=\infty} \rho V_e = \frac{4}{3} \pi a^3$, così risulta

$$V_e = \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{1}{\rho}.$$

Nello spazio interno:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dV_i}{d\rho} \right) = -4\pi,$$

donde

$$V_i = -\frac{2\pi\rho^2}{3} + \frac{c}{\rho} + c'.$$

Sarà $c = 0$ dovendo V_i essere finita anche per $\rho = 0$. Di più in superficie ($\rho = a$) V_i e V_e assumendo lo stesso valore,

$$c' = 2\pi a^2,$$

e ritroviamo gli stessi risultati del § 4.

Consideriamo ora un ellissoide a tre assi disuguali: siano a, b, c, in ordine decrescente, i suoi semiassi. Indichiamo con x, y, z un punto esterno e consideriamo l'equazione in λ:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0, \qquad (14)$$

cioè:

$$f(\lambda)=(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)-$$
$$-\sum x^2(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)=0.$$

Facendo successivamente $\lambda=\infty$, 0, $-b^2$, $-c^2$, $f(\lambda)$ presenta tutte variazioni di segno e però l'equazione precedente ha le radici reali, una positiva e due negative. Se il punto x, y, z giace sull'ellissoide, la radice positiva diventa nulla.

Derivando la (14) rispetto x si ottiene:

$$\frac{2x}{a^2+\lambda}=\left(\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

e due analoghe; moltiplicandole quindi per $\frac{x}{a^2+\lambda}$, ecc., e sommando, otteniamo:

$$\sum\frac{x}{a^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}=2. \qquad (15)$$

Ciò posto indicando con λ la radice positiva della (14), pongasi

$$L=2\pi abc\int_\lambda^\infty\frac{du}{U},\ A=2\pi abc\int_\lambda^\infty\frac{du}{(a^2+u)U},\ \text{ecc.}$$

con:

$$U = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)},$$

e:

$$L_0 = 2\pi abc \int_0^\infty \frac{du}{U}, \quad A_0 = 2\pi abc \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u)U}, \text{ ecc.}$$

Queste grandezze (dipendenti da integrali ellittici) sono funzioni di λ e quindi di x, y, z e notando che per $u = \infty$, $\frac{1}{U}$ diventa nulla di ordine superiore al primo, si deduce che sono sempre finite.

Detto Λ il valore di U per $u = \lambda$ e ricordando la regola per la derivazione di un integrale a limiti variabili, otteniamo

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2\pi abc \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -2\pi abc \frac{1}{(a^2 + \lambda)\Lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \text{ ecc.}$$

Finalmente osserviamo una relazione importante.

$$A + B + C = 2\pi abc \int_\lambda^\infty \frac{du}{U}\left(\frac{1}{a^2 + u} + \frac{1}{b^2 + u} + \frac{1}{c^2 + u}\right) =$$

$$= 4\pi abc \int_\lambda^\infty \frac{dU}{U^2},$$

perchè

$$2\frac{dU}{U} = du\left(\frac{1}{a^2+u} + \frac{1}{b^2+u} + \frac{1}{c^2+u}\right).$$

Quindi

$$A + B + C = \frac{4\pi abc}{\Lambda}$$

e in conseguenza:

$$A_0 + B_0 + C_0 = 4\pi.$$

Ciò premesso dico che la funzione potenziale dell'ellissoide omogeneo per un punto interno ed esterno ha le seguenti espressioni *:

$$\left.\begin{aligned} V_i &= \frac{1}{2}(L_0 - A_0 x^2 - B_0 y^2 - C_0 z^2) \\ V_e &= \frac{1}{2}\ (L - A x^2 - B y^2 - C z^2). \end{aligned}\right\} (16)$$

Queste due funzioni infatti sono regolari all'interno ed all'esterno dell'ellissoide e in superficie ($\lambda = 0$) assumono lo stesso valore.

---

* Dirichlet, l. c., pag. 49 e seg. Queste formule sono state dedotte in maniere svariatissime; fra le più eleganti e dirette è quella seguita dal Beltrami, *Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi.* Mem. Acc. Sc. d. Bologna, 1; 1880. Su varie altre forme della V vedi le belle note del prof. Pizzetti, *Rend. Acc. Lincei.* 1894, pag. 200 e del prof. Morera, ibidem, pag. 371.

Quanto alle derivate si ha

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = -A_0 x,$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = -A x -$$

$$-\pi a b c \frac{1}{\Lambda}\left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

e per la (14)

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = -A x.$$

Dunque le derivate sono continue dovunque e anche attraverso la superficie limite.

Poscia:

$$\Delta_2 V_i = -(A_0 + B_0 + C_0) = -4\pi$$

che è l'equazione di Poisson;

$$\Delta_2 V_e = -(A + B + C) + \frac{2\pi a b c}{\Lambda}\sum \frac{x}{a^2+\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

$$\Delta_2 V_e = 0$$

in virtù della (15): e si ha l'equazione di Laplace.

Vediamo finalmente come si comporta V_e all'infinito.

Dividendo ambo i membri della (14) per

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

si ha

$$\sum \frac{x^2}{1+\frac{a^2}{\lambda}} : (x^2+y^2+z^2) = \lambda : R^2;$$

dunque:

$$\lim_{R=\infty} \frac{\lambda}{R^2} = 1.$$

Se diciamo u_1 un conveniente valore di u compreso tra λ ed ∞, si ha

$$L = \frac{2\pi a b c}{\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{u_1}\right)\ldots}} \int_{\lambda}^{\infty} u^{-\frac{3}{2}} d u = \frac{4\pi a b c}{\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{u_1}\right)\ldots}} \lambda^{-\frac{1}{2}};$$

quindi:

$$\lim_{R=\infty} R\,L = 4\pi a b c = 3\,\mathbf{M}.$$

In modo analogo:

$$\lim R^3 A = \lim R^3 B = \lim R^3 C = \mathbf{M}.$$

Allora:

$$\lim R\,V_e = \frac{1}{2}\left\{\lim R\,L - \lim R^3 A \,.\, \frac{x^2}{R^2}\ldots\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{3\,\mathbf{M} - \mathbf{M}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\right\} = \mathbf{M}.$$

Allo stesso modo si prova che:

$$\lim R^2 \frac{\partial V_e}{\partial x} = -\,\mathbf{M}\cos\alpha, \text{ ecc.}$$

Tutte le condizioni volute dal teorema di Dirichlet sono soddisfatte e la funzione V definita dalle (16) è precisamente la richiesta.

Si può di qui dedurre un elegante e famoso teorema di Maclaurin.

Siano E ed E_1 due ellissoidi omofocali; per il secondo si abbia

$$\sum \frac{x^2}{a_1^2 + \lambda_1} - 1 = 0;$$

e poichè

$$a_1^2 = a^2 + \rho, \text{ ecc.}$$

si deduce, dal confronto colla (14),

$$\lambda = \lambda_1 + \rho.$$

Ora:

$$A_1 = 2\pi a_1 b_1 c_1 \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + \rho + u)\sqrt{(a^2 + \rho + u)\ldots}}$$

e mutando $\rho + u$ in u,

$$A_1 = 2\pi a_1 b_1 c_1 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u)\sqrt{(a^2 + u)\ldots}}$$

e però:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{a\,b\,c}{a_1\,b_1\,c_1} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{M}_1}; \text{ e così per le altre.}$$

Ma A ed A_1 sono proporzionali alle derivate delle singole funzioni potenziali; dunque:

due ellissoidi omogenei omofocali esercitano sopra uno stesso punto esterno attrazioni dirette secondo la stessa retta e proporzionali alle masse.

§ **9. Funzione potenziale di uno strato semplice.** — Siano σ e σ' due superficie infinitamente vicine, $d\sigma$ un elemento della prima dai cui punti elevinsi le normali a σ; sia ε la lunghezza di uno dei pezzi di normale intercetta da σ'. Il cilindro avente per base $d\sigma$ e per altezza ε, ha per volume $\varepsilon\, d\sigma$; diciamo δ la densità della materia che si suppone distribuita tra σ e σ'. La massa del volume è $h\, d\sigma$ in cui $h = \varepsilon\delta$.

Facciamo ora tendere σ a σ' e supponiamo che il prodotto $\varepsilon\delta$ tenda, per ciascun punto di σ, verso un limite che diremo ancora h. Diciamo, in tal caso, di aver fatta sopra σ una distribuzione superficiale (o di strato semplice) con densità variabile h. La funzione potenziale di questo strato, cioè quella funzione le cui derivate danno le componenti dell'attrazione esercitata sul punto potenziato, è espressa da

$$V = \int \frac{h\, d\sigma}{r}, \tag{17}$$

dove l'integrazione è estesa alla superficie σ, ed r indica la distanza variabile di un punto qualunque di σ dal punto potenziato. Sulla densità h faremo alcune ipotesi che risulteranno dal § seguente.

§ **10. Caratteristiche della funzione potenziale di strato semplice. Discontinuità delle derivate prime.** — Se il punto potenziato non cade sulla superficie σ, la funzione V è regolare, insieme colle

derivate di qualsivoglia ordine; soddisfa l'equazione di Laplace e all'infinito si comporta come una funzione potenziale di spazio.

Sia P_0 un punto di σ e circoscriviamolo con un'area σ_0: sia σ_1 la ulteriore parte di σ e decomponiamo al solito V in V_0 e V_1; la V_1 e le sue derivate saranno sempre regolari anche quando il punto potenziato P cadrà in P_0. Basterà dunque occuparci di V_0. Supponiamo di aver scelto σ_0 in modo che in essa cadano soltanto punti ordinari di σ e sufficientemente piccola in guisa che la sua proiezione s_0 su di uno qualunque dei piani coordinati corrisponda punto per punto con σ_0; e l'asse z scelto in modo che per ogni punto di σ_0:

$$\cos(n, z) \neq 0.$$

Il cilindro proiettante σ_0 in s_0 sia riempito di una materia di densità k (per ora arbitraria) di cui sia W la funzione potenziale nel punto P; cioè:

$$W = \int \frac{k\, d\, S}{r},$$

e quindi:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \int k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\, S = -\int k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} d\, S =$$

$$= -\int \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{k}{r}\right) d\, S + \int \frac{\partial}{\partial c} \frac{k\, d\, S}{r};$$

a, b, c sono le coordinate di un punto qualunque di S.

Alla funzione $\frac{k}{r}$ che figura nel primo integrale si applichi il lemma di Gauss (Cap. 1°, form. 2), quindi:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \int \frac{k}{r} \cos(n, z)\, ds + \int \frac{\partial k}{\partial c} \frac{dS}{r},$$

s essendo la superficie di S, la quale si compone di s_0, di τ_0 e della superficie laterale del cilindro. Il primo integrale adunque si spezza in altri tre; ma sulla superficie laterale è $\cos(n, z) = 0$ e sopra s_0, $\cos(n, z) = 1$ e però:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \int \frac{k}{r} \cos(n\, z)\, d\sigma_0 + \int \frac{k}{r} d s_0 + \int \frac{\partial k}{\partial c} \frac{dS}{r}.$$

Disponiamo ora di k in modo che per ogni punto di σ_0 si abbia:

$$k \cos(n, z) = h$$

la quale suppone h tale che k, da essa determinato, sia finito. Fisseremo la densità del cilindro supponendo che k abbia un valore costante lungo ogni parallela alle generatrici del cilindro e precisamente lo stesso valore che ha in σ_0. Allora

$$\frac{\partial k}{\partial c} = 0;$$

se infine diciamo v_0 la funzione potenziale di una materia distribuita su s_0 con densità k, risulta

$$V_0 = \frac{\partial W}{\partial z} - v_0.$$

Ora quando P coincide con P_0, le W, $\frac{\partial W}{\partial z}$ e v_0 sono sempre finite e continue e lo stesso accadrà di V_0; dunque:

la funzione potenziale di uno strato semplice è monodroma, finita e continua anche quando il punto potenziato fa parte dello strato e l'attraversa.

Inoltre notando che le derivate di v_0 sono continue in P_0, si deduce

$$\lim_{n=0}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_n - \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_{-n}\right\} = \lim_{n=0}\left\{\left(\frac{\partial V_0}{\partial u}\right)_n - \left(\frac{\partial V_0}{\partial u}\right)_{-n}\right\}$$
$$= \lim_{n=0}\left\{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial u}\right)_n - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial u}\right)_{-n}\right\}.$$

Il valore di quest'ultima espressione si può calcolare colla formola (13) e risulta eguale a

$$-4\pi k \cos(n, z)\cos(n, u) = -4\pi h \cos(n, u).$$

Dunque:

le derivate prime della funzione potenziale di uno strato semplice sono discontinue attraverso la superficie.

Per l'esistenza di queste derivate, subordinata a quella delle derivate di W, occorre fare su h ipotesi tali che risultino verificate per k le condizioni del § 5.

Le discontinuità sono determinate mediante la:

$$\lim_{n=0}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_n - \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_{-n}\right\} = -4\pi h \cos(n, u). \text{ * } \quad (18)$$

* WEINGARTEN, mem. cit.

Si moltiplichi questa per $\cos(n, u)$ e poi si faccia $u = x, y, z$. Sommando le equazioni ottenute e poi ricordando che

$$\lim_{n=0} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_n \cos(n, x) + \ldots \right\} = \frac{dV}{dn},$$

si ottiene:

$$\left(\frac{dV}{dn} \right)_n - \left(\frac{dV}{dn} \right)_{-n} = -4\pi h.$$

Acceniamo con n' la direzione opposta ad n; la precedente si potrà quindi trasformare in quest'altra, generalmente usata,

$$\frac{dV}{dn} + \frac{dV}{dn'} = -4\pi h. \tag{19}$$

Indicando invece con t una tangente in P_0 a σ, e con t' la direzione opposta, si deduce:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{dV}{dt'} = 0;$$

le derivate prime secondo la tangente sono continue.

Le proprietà che abbiamo a mano a mano enunciate sono caratteristiche per una funzione potenziale di strato semplice e la determinano completamente.

Basta ripetere la dimostrazione del § 7°.

§ 11. Funzione potenziale di doppio strato. — Sia σ una superficie aperta o chiusa; fissiamo la parte dalla quale si riguardano positive le normali che prolungheremo di una quantità ε (variabile anche da punto a punto); gli estremi formeranno

una nuova superficie σ'. Su σ sia distribuito un semplice strato di densità h che attragga (secondo la legge di Newton) un punto P in cui risiede l'unità di massa; parimenti su σ' sia distribuito un altro strato semplice di densità h' il quale invece respinga la stessa massa di P. Le masse di questi due strati, negli elementi superficiali corrispondenti agli estremi di una stessa ε, siano eguali cioè:

$$h\,d\sigma = h'\,d\sigma'.$$

La funzione potenziale dell'azione complessiva esercitata dai due strati sul punto P è data da:

$$V = \int \frac{h\,d\sigma}{r} - \int \frac{h'\,d\sigma'}{r'} = \int h\,\varepsilon\,\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}{\varepsilon}\,d\sigma,$$

indicando con r ed r' le distanze di P da due punti corrispondenti di σ e σ'. Facciamo ora diminuire indefinitamente ε in modo però che, aumentando h, il prodotto $h\varepsilon$ converga per ogni punto di σ ad un limite che diremo μ. Al limite, per $\varepsilon = 0$, risulterà

$$V = \int \mu \frac{d\frac{1}{r}}{d\,n}\,d\sigma. \tag{20}$$

Abbiamo dunque due superficie infinitamente vicine, dai punti corrispondenti delle quali si esercitano forze attrattive e ripulsive di eguale intensità e costituenti * un *doppio strato* di cui V

* HELMHOLTZ: *Poggendorff's Ann.* **89**; 1853. *Wiss. Abhan.* I, p. 490.

è la *funzione potenziale:* μ è la *densità* o il *momento del doppio strato.*

Se μ è costante il doppio strato è omogeneo e per la (1') del Cap. 1° si ha:

$$V = \mu(\sigma).$$

La funzione V gode all'esterno di σ delle solite proprietà e soddisfa la $\Delta_2 = 0$.

Per vedere che cosa accade quando il punto potenziato si avvicina a σ, cominciamo a considerare il caso particolare del doppio strato omogeneo e precisamente sia $\mu = 1$. Sia U la funzione potenziale corrispondente; P_0 un punto di σ (che può essere anche un punto conico o di una linea singolare); U_n e U_{-n} rispettivamente il valore di U in due punti P_1 e P_2, discosti da σ, e situati il primo dalla parte della faccia positiva e l'altro dalla negativa. Se σ è aperta chiudiamola con una o un sistema di superficie $\bar{\sigma}$ tali che P_1 sia interno ad una sola superficie dell'insieme ed esterno a tutte le altre e sia $\bar{U}$ la funzione potenziale del doppio strato omogeneo unitario di $\bar{\sigma}$; scegliendo in modo opportuno la faccia positiva di $\bar{\sigma}$ si ha:

$$U_n + \bar{U}_n = 4\pi, \; U_0 + \bar{U}_0 = \omega, \; U_{-n} + \bar{U}_{-n} = 0$$

essendo ω l'angolo visuale di $\sigma + \bar{\sigma}$ da P_0, indipendente da $\bar{\sigma}$.

Ma col tendere di P_1 e P_2 a P_0 (ciò che accenneremo brevemente con $\lim n = 0$) e poichè la $\bar{U}$ è certamente continua in P_0, si ha:

$$\lim_{n=0} U_n = 4\pi - \omega + U_0,$$

$$\lim_{n=0} U_{-n} = -\omega + U_0.$$

Passiamo ora al caso generale. Ammettiamo che *la densità* μ *sia finita e continua in* P_0, in cui ha il valore μ_0. Racchiudiamo P_0 entro una porzione di superficie σ' di σ talmente piccola che ivi si abbia

$$|\mu - \mu_0| < \varepsilon$$

con ε piccolo a piacere. Poichè

$$V = \mu_0 \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma + \int (\mu - \mu_0) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma,$$

possiamo scrivere:

$$V = \mu_0 U + W$$

essendo W analoga alla V, ma relativa alla densità $\mu - \mu_0$.

Dico che W è continua in P_0. Sia infatti P un punto diverso da P_0; la W si può spezzare in due: una relativa a σ', l'altra a $\sigma - \sigma'$; quest'ultima essendo certamente continua in P_0, basterà considerare la prima parte; per la quale (vedi pag. 11) si ha

$$|W(P)| = \int |\mu - \mu_0| \left| \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right| d\sigma < 4\pi p \varepsilon;$$

questa essendo valida qualunque sia la posizione del punto P, abbiamo

$$|W(P) - W(P_0)| < 8\pi p \varepsilon.$$

Ciò posto si ha:

$$\lim V_n = \mu_0 (4\pi - \omega + U_0) + W(P_0),$$
$$\lim V_{-n} = \mu_0 (-\omega + U_0) + W(P_0);$$

cioè: *V col tendere del punto verso* σ *tende a limiti determinati e finiti;* di qui:

$$\lim_{n=0} V_n - \lim_{n=0} V_{-n} = 4\pi\mu_0;$$

cioè: *la funzione potenziale di doppio strato è discontinua attraverso la superficie* *.

Ferme restando le stesse ipotesi su μ, ha pure luogo il teorema, che ci limitiamo ad enunciare: *le derivate normali della funzione potenziale di doppio strato hanno un limite determinato e finito allorchè si tende al punto* P_0 *in una direzione qualsiasi e i limiti che si hanno avvicinandosi dalle due parti di* σ *sono eguali* **.

Valendoci della continuità di V si può estendere il risultato del § 10; cioè si possono calcolare i due limiti delle derivate normali di una funzione potenziale di strato semplice σ, quando col punto potenziato si tende ed un punto di σ movendosi sulla normale e dalle due parti di σ, nella sola ipotesi che *la densità sia continua in* P_0 ***.

---

* POINCARÉ: *Théorie du pot. Newtonien.* § 100. LAURICELLA: *Atti R. Acc. d. Torino,* ; **35**; 1900.

** LAURICELLA; *mem. cit.* Per ricerche più generali: LIAPOUNOFF: *C. R.*, **125**, p. 694; 1897. *Jour. de Mathém.* **4**, p. 421; 1898.

*** LAURICELLA: *mem. cit.;* vedi anche una nota del professor MORERA: *Rend. Ist. Lomb.* **20**, p 543; 1887.

Si noterà ora che tutti gli integrali che figurano nelle formule del Cap. 1.° hanno una delle tre forme (2), (17), (20), e però possono sempre interpretarsi come funzioni potenziali ordinarie, di strato semplice e di doppio strato.

§ 12. Identità di Gauss. Teorema di reciprocità. — Nei punti P', P'',... sono concentrate le masse M', M'',... Sia V la funzione potenziale: sarà

$$V = \frac{M'}{R'} + \frac{M''}{R''} + \dots$$

dove R', R'',... indicano le distanze del punto potenziato da P', P'',...

Consideriamo un secondo sistema di punti p', p'',... nei quali sono concentrate le masse m', m'',.. ; sia v la loro funzione potenziale.

Diciamo V', V'',... i valori che la funzione potenziale del primo sistema prende nei punti p', p'',... del secondo; e v', v'',... i valori che quella del secondo prende nei punti P', P'',... del primo; sicchè:

$$V' = \frac{M'}{P'p'} + \frac{M''}{P''p'} + \dots; \quad v' = \frac{m'}{p'P'} + \frac{m''}{p''P'} + \dots$$

$$V'' = \frac{M'}{P'p''} + \frac{M''}{P''p''} + \dots; \quad v'' = \frac{m'}{p'P''} + \frac{m''}{p''P''} + \dots$$

ecc. Moltiplicando le eguaglianze a destra rispettivamente per m', m'', ecc. e sommandole per colonne si ha

$$m'V' + m''V'' + \dots = M'v' + M''v'' + \dots$$

o, in forma più concisa,

$$\sum m\, V = \sum M\, v \tag{21}$$

in cui la sommatoria a primo membro è da estendersi a tutti i punti del secondo sistema e l'altra a quelli del primo.

La (21) esprime l'*identità di Gauss*. Vediamone il significato meccanico.

Le masse del secondo sistema siano attratte da quelle del primo colla legge di Newton. Siano x, y, z le coordinate di un punto qualunque del primo; x', y', z' quelle di un punto del secondo; considero l'azione totale del secondo sistema su di un punto del primo, di componenti X, Y, Z tali che:

$$X = M \sum_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \text{ecc.}$$

la sommatoria essendo estesa al secondo sistema. Facciamo lo stesso per tutti i punti del primo sistema; è quindi:

$$\sum_1 (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = d \sum_{1,2} \frac{M\,m}{r}\,.$$

Integriamo dalla posizione in cui il primo sistema è a distanza infinita dall'altro, alla posizione attuale: l'integrale del primo membro esprime *il lavoro compiuto dalle forze di attrazione del secondo sul primo sistema nel passaggio dall'infinito alla posizione attuale.*

§ 14. Teoremi sulla funzione potenziale all'esterno delle masse agenti.

1.° *Se la funzione potenziale ha un valore costante in una certa regione (linearmente connessa) che non racchiude masse, essa è costante in tutto lo spazio libero da masse.*

Sia S la regione linearmente connessa in cui V è costante (positiva); supponiamo che nello spazio vuoto esterno ad S la V non si mantenga più costante ed eguale p. e. a C, ma varii: varierà però con continuità; quindi si potrà determinare uno spazio S_1 contiguo ad S in cui V assumerà valori tutti più grandi di C. Ora centro in un punto di S potremo, con raggio conveniente, descrivere una sfera una parte della quale, di superficie σ_0, sia interna ad S e l'altra σ, sia nello spazio S_1. Su σ_0 è $V = C$, mentre su σ_1, $V > C$ dunque:

$$\int V_\sigma \, d\sigma > 4\pi a^2 C$$

la quale contradice la (21); però la V all'esterno di S e nello spazio vuoto non può variare.

2.° *In un punto a distanza finita dalle masse agenti il valore della funzione potenziale non può essere nè massimo, nè minimo.*

Sia in M_0, se è possibile, la V massima; intorno M_0 potremo tracciare una regione che non racchiuda masse e in cui V abbia un valore più piccolo che in M_0. Centro in M_0 tracciamo una sfera di raggio a e tutta contenuta in quella regione; quindi:

$$4\pi a^2 V_0 > \int V_\sigma \, d\sigma$$

la quale pure contradice la (21).

3.° *Se si traccia una superficie σ che non racchiuda masse, la funzione potenziale o è sempre costante all'interno o è sempre compresa tra il più grande ed il più piccolo dei valori che essa prende in superficie.*

Infatti la V essendo continua e finita nell'interno di σ ammetterà un limite superiore L ed uno inferiore l e dovrà in qualche punto * assumere il valore L ed l: ma tale punto non può trovarsi nello interno chè ivi allora la V ammetterebbe un massimo o un minimo; dunque è vero ecc.

In conseguenza:

4.° *Se la funzione potenziale ha lo stesso valore in tutti i punti di una superficie chiusa σ che non racchiude masse, avrà lo stesso valore in tutti i punti interni.*

In tal caso infatti $L = l =$ cost. Questo teorema non è sostanzialmeute diverso da quello del § 8 del cap. 1.°; ma la dimostrazione precedente, nulla supponendo sulla derivata al contorno, è più generale.

Consideriamo ora una superficie σ che racchiuda tutte le masse. Lo spazio vuoto esterno può considerarsi compreso tra σ e una sfera di raggio infinitamente grande sulla quale V ha il valor zero. Dunque:

5.° *Se σ è una superficie che racchiude tutte le masse agenti i valori della funzione potenziale all'esterno di σ sono compresi tra il più grande e*

---

* Vedi VIVANTI: *Corso di Calc. Infin.* Messina, 1899; p. 51 e 72.

il più piccolo dei tre numeri 0, l, L, *dove* l *ed* L *sono il valore più piccolo e più grande che* V *assume su* σ.

In conseguenza:

6.° *Se* V *su* σ *assume il valore zero, è sempre zero all'esterno; se prende un valor costante* C, *i suoi valori all'esterno sono sempre compresi tra* 0 *e* C *.

---

* I teoremi 1), 2) sono di GAUSS; gli altri di NEUMANN (libro citato).

CAPITOLO TERZO.

PRINCIPII DELLA MECCANICA DEI CORPI CONTINUI.

Diremo continuo un corpo non rigido cioè deformabile: p. e. una massa liquida o gassosa; un corpo elastico, ecc.

Sotto l'azione di forze agenti in superficie e su ogni elemento di massa, tali corpi si deformano; la distanza tra due punti varia di grandezza, ecc. Considereremo sempre corpi continui a tre dimensioni; nè supporremo che una o due delle dimensioni siano trascurabili di fronte alla terza; quindi le lamine elastiche di spessore infinitamente piccolo; le verghe, ecc. saranno escluse dalle nostre considerazioni.

§ **1. Deformazione di una particella.** — Vogliamo anzitutto formarci un'idea della più generale deformazione di un corpo continuo, prescindendo dalle cause che hanno prodotto la deformazione. Diciamo *iniziale* o *naturale* lo stato del corpo non deformato e in questo consideriamo un punto M. Avvenuta la deformazione, M assumerà un'altra posizione M'; il segmento MM' dicesi lo *spostamento* del punto M e le sue proie-

zioni su tre assi ortogonali x, y, z chiamansi *componenti di spostamento*. Le accenneremo costantemente con u, v, w e saranno funzioni delle coordinate x, y, z di M. Se supponiamo che in quella parte del corpo che si considera non avvengano nè rotture, nè sovrapposizioni, le u, v, w saranno ivi regolari; ammetteremo inoltre che esistano le loro derivate prime.

Consideriamo un intorno del punto M e in questo un punto N di coordinate $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$: siano cioè ξ, η, ζ le coordinate di N rispetto alla terna condotta per M parallelamente agli assi coordinati. Dopo la deformazione, N verrà in N'; il luogo dei punti N' costituisce un nuovo intorno del punto M', che diremo *deformato dell'intorno* di M. Diremo ξ', η', ζ' le coordinate relative di N'. Quelle assolute di M' sono:

$$x_1 = x + u(x, y, z); \text{ ecc.}$$

Da quelle di M passiamo a quelle di N aumentando x, y, z di ξ, η, ζ. Dunque

$$x + \xi' = x + \xi + u(x+\xi, y+\eta, z+\zeta); \text{ ecc.}$$

cioè

$$\xi' = \xi + u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\xi + \ldots\right)^2 + \ldots$$

Potremo sempre immaginare un intorno del punto M, tale che in esso i termini a partire

dalla seconda parentesi siano trascurabili di fronte ai primi. A seconda poi della natura fisica del corpo le dimensioni di questo intorno potranno essere finite o infinitesime. Quindi

$$\left.\begin{aligned}
\xi' &= \xi + u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta \\
\eta' &= \eta + v + \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta \\
\zeta' &= \zeta + w + \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

in cui le $u, \ldots$ e le loro derivate si riferiscono al punto M fisso dell'intorno.

Dunque *le coordinate relative di N' sono funzioni lineari delle coordinate di N'.*

In queste formule è contenuta la legge della deformazione dell'intorno di M; risulta subito che, potendosi in generale esprimere dalle (1) le ξ, η, ζ linearmente per le ξ', η', ζ',
nella deformazione i piani si trasformano in piani e le rette in rette.

Poichè a valori infinitamente grandi di $\xi, \ldots$ corrispondono pure valori infinitamente grandi di $\xi', \ldots$, si ha pure:
piani e rette parallele si mantengono parallele.

Potremo quindi avere un'idea ben netta della deformazione dell'intorno di M, se conosceremo in qual modo si deformerà un parallelepipedo col vertice in M e cogli spigoli lungo gli assi; il quale si manterrà, dopo la deformazione, ancora paral-

lelepipedo senza esser più, in generale, rettangolo. Basterà dunque saper assegnare la posizione del punto M', la orientazione e la lunghezza dei nuovi spigoli. La posizione del nuovo parallelepipedo nello spazio dipende da un trasporto di corpo rigido. In quanto alle nuove lunghezze basterà conoscere di quanto ciascuno spigolo si è allungato o accorciato rispetto alla lunghezza primitiva. Cioè per uno spigolo MA converrà conoscere il rapporto $M'A' - MA : MA$.

Esso è positivo o negativo secondo che si tratta di un allungamento o accorciamento e dicesi *coefficiente di dilatazione lineare* nella direzione MA.

Dovremo dunque conoscere i tre coefficienti di dilatazione lineare nelle tre direzioni degli spigoli MA, MB, MC.

Per conoscere infine le orientazioni mutue degli spigoli del nuovo parallelepipedo, basterà conoscere di quanto l'angolo $B'M'C'$ differirà da un angolo retto; la differenza tra questi due angoli dicesi lo *scorrimento mutuo* delle due direzioni MB, MC; dunque dovremo conoscere gli scorrimenti mutui delle tre direzioni MA, MB, MC due a due. Vediamo ora come questi elementi, che in sostanza definiscono la deformazione della *particella* o intorno del punto M, dipendano dalle componenti di spostamento, coordinate del punto, ecc.

Le formule

$$x_1 = x + u, \quad y_1 = y + v, \quad z_1 = z + w,$$

riferiscono lo spazio x_1, y_1, z_1 allo spazio x, y, z punto per punto. L'elemento del primo spazio è

definito da

$$d s_1^2 = d x_1^2 + \ldots = A d x^2 + \ldots + 2 D d y d z + \ldots$$

Se

$$A = B = C = 1, \quad D = E = F = 0,$$

sarà

$$d s_1^2 = d s^2.$$

La deformazione è quindi connessa con le sei funzioni

$$\varepsilon_1 = \frac{A-1}{2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \text{ecc.}$$

$$\gamma_1 = D = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right), \text{ ecc.}$$

Se esse infatti sono nulle in tutto il corpo, si può dimostrare che la trasformazione corrisponde ad un moto di corpo rigido accompagnato, se occorre, con una trasformazione per simmetria. Se sono costanti, le x_1, y_1, z_1 sono funzioni lineari intere di x, y, z, e la deformazione dicesi *omogenea*. Ma i limiti impostici non ci permettono di ulteriormente sviluppare questa teoria; dobbiamo quindi limitarci a considerare un caso speciale, particolarmente interessante nelle applicazioni *.

---

* Tale teoria risale a CAUCHY: *Anc. Exer.* 1827 *Oeuvres.*, 7, (2) p. 82; che ha appunto definito le $\varepsilon_1, \ldots \gamma_1, \ldots$ Essa è

§ **2. Deformazione infinitesima.** — Supponiamo le u, v, w e le loro derivate prime assai piccole. Non solo quindi M' sarà assai prossimo ad M, ma ogni altro punto del suo intorno sarà molto vicino al suo corrispondente; la deformazione cioè è infinitamente piccola.

Ponendo

$$\xi' = \xi + \delta\xi, \quad \eta' = \eta + \delta\eta, \quad \zeta' = \zeta + \delta\zeta,$$

risulterà

$$\left.\begin{aligned} \delta\xi &= u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta \\ \delta\eta &= v + \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta \\ \delta\zeta &= w + \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

È facilissimo dimostrare che due deformazioni infinitesime sono invertibili.

§ **3. Coefficiente di dilatazione di una retta; scorrimento mutuo di due rette. Componenti di deformazione.** — Per M traccio un raggio ad ar-

---

stata sviluppata dal SAINT-VENANT e sopratutto da Lord KELVIN: *Treatise on Natural Philosophy.* Part. 1a, *Kinematics* 1896.

Vedi in proposito: LOVE: *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.* Cambridge, 1892: **1**; Cap. 1°; la bella monografia di E. et F. COSSERAT: *Sur la théorie de l'élasticité.* Annales d. la Fac. d. Sc. d. Toulouse, **10**; 1897; ed una mia nota: *Les comp. de déformation d'un milieu continu.* Jorn. de Sciencias Mathematicas, **13**; 1899.

bitrio, di coseni α, β, γ. Dopo la deformazione esso si trasformerà in un altro raggio uscente da M'; siano $\alpha + \delta\alpha$, $\beta + \delta\beta$, $\gamma + \delta\gamma$ i suoi coseni. Sul primo considero un punto N infinitamente prossimo ad M; sia N' il suo corrispondente sul secondo ed ε il coefficiente di dilatazione: di guisa che

$$M'N' = MN(1 + \varepsilon),$$

ed inoltre

$$\xi = \alpha MN, \quad \xi + \delta\xi - u = (\alpha + \delta\alpha) M'N',$$

$$(\alpha + \delta\alpha)(1 + \varepsilon) = \alpha + \frac{\partial u}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\gamma.$$

Trascurando a primo membro il prodotto $\varepsilon\delta\alpha$, essendo ε dell'ordine delle derivate di $u, \ldots$, si ha

$$\left.\begin{aligned}
\delta\alpha &= -\varepsilon\alpha + \frac{\partial u}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\gamma \\
\delta\beta &= -\varepsilon\beta + \frac{\partial v}{\partial x}\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\gamma \\
\delta\gamma &= -\varepsilon\gamma + \frac{\partial w}{\partial x}\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\beta + \frac{\partial w}{\partial z}\gamma.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Tracciamo per M un altro raggio di coseni α', β', γ', che formi col primo un angolo θ: a questo, nella deformazione, verrà a corrispondere un altro raggio uscente da M', che forma coll'altro un angolo $\theta - \iota$; sia ε' il coefficiente di dilatazione lineare relativo a questa nuova direzione. Come per le (3) avremo

$$\delta\alpha' = -\varepsilon'\alpha' + \frac{\partial u}{\partial x}\alpha' + \frac{\partial u}{\partial y}\beta' + \frac{\partial u}{\partial z}\gamma', \text{ ecc.} \quad (4)$$

Ora

$$\cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma',$$

$$\cos(\theta - \iota) = (\alpha + \delta\alpha)(\alpha' + \delta\alpha') + \ldots$$

Trascurando nel secondo membro di questa i prodotti $\delta\alpha\,\delta\alpha'$, ecc., ponendo $\cos\iota = 1$, $\operatorname{sen}\iota = \iota$ si ha

$$\iota \operatorname{sen}\theta = \alpha\,\delta\alpha' + \alpha'\,\delta\alpha + \ldots$$

Moltiplichiamo quindi le (3) per α', β', γ', le (4) per α, β γ e poi sommiamo; otterremo

$$\left.\begin{aligned}\iota \operatorname{sen}\theta = -(\varepsilon + \varepsilon')\cos\theta + 2(a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma') + \\ + f(\beta\gamma' + \beta'\gamma) + g(\gamma\alpha' + \gamma'\alpha) + h(\alpha\beta' + \alpha'\beta);\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

dove si sono fatte le posizioni fondamentali

$$\left.\begin{aligned} a = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad b = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad c = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ f = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \; g = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \; h = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

e questi valori si riferiscono al punto M. Queste sei combinazioni delle nove derivate delle componenti di spostamento sono della massima importanza: esse diconsi (ne vedremo la ragione) *componenti di deformazione nel punto M.*

Consideriamo due casi notevoli della (5): supponiamo dapprima coincidenti le direzioni α, β, γ ed α', β', γ'; quindi $\theta = 0$, $\varepsilon = \varepsilon'$ e però

$$\varepsilon = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + f\beta\gamma + g\gamma\alpha + h\alpha\beta; \quad (7)$$

il coefficiente di dilatazione lineare di un elemento uscente da M è una funzione lineare ed omogenea

delle sei componenti di deformazione relative ad M ed una funzione quadratica ed omogenea dei coseni direttori dell'elemento.

Supponiamo in secondo luogo $\theta = 90°$ cioè ortogonali i due elementi: ι esprime lo scorrimento mutuo dei due elementi ed è dato da

$$\left.\begin{aligned} \iota = 2(a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma') + f(\beta\gamma' + \beta'\gamma) + \\ + g(\gamma\alpha' + \gamma'\alpha) + h(\alpha\beta' + \alpha'\beta) = \\ = \alpha\frac{\partial\varepsilon'}{\partial\alpha'} + \beta\frac{\partial\varepsilon'}{\partial\beta'} + \gamma\frac{\partial\varepsilon'}{\partial\gamma'} = \alpha'\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha} + \beta'\frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta} + \gamma'\frac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}; \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

lo scorrimento mutuo di due rette ortogonali è una funzione lineare delle sei componenti di deformazione e bilineare dei coseni direttori dei due elementi *.

Dunque la conoscenza delle sei componenti di deformazione relative ad M farà assegnare il coefficiente di dilatazione lineare di qualsivoglia elemento e lo scorrimento mutuo di rette ortogonali uscenti da M; sapremo quindi assegnare la deformazione di un elemento parallelepipedo e quindi ancora la deformazione dell'intorno di M. Ciò giustifica il nome di componenti di deformazione dato alle sei grandezze $a, b, c \ldots h$. Il seguente teorema ne chiarirà meglio il significato.

Se per qualsivoglia punto di un corpo continuo sono nulle le componenti di deformazione, il corpo è rigido.

---

* Questo metodo così diretto ed elegante per ottenere al tempo stesso ε e ι è dovuto al prof. Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità*. Torino, 1894, pag. 6-8.

Supponiamo infatti che per qualunque valore di x, y, z, in un certo campo S, si abbia

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x}=0\,,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=0\,,\ \dfrac{\partial w}{\partial z}=0\,, \\ \dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Derivando le tre ultime rispetto x, y, z, si ha:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0\,,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=0\,;$$

quindi si conclude che:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=0,\ \text{ecc.}$$

ma dalla prima delle (9) risulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=0\,,$$

cioè tutte le derivate miste di u sono nulle. Derivando la seconda delle (9) rispetto x, la sesta rispetto y, si trae

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \text{ecc.}$$

e così si prova che sono nulle tutte le derivate seconde, terze,... di u, v, w.

Dunque sarà

$$u = u_0 + a x + b y + c z, \; v = v_0 + a' x + b' y + c' z,$$
$$w = w_0 + a'' x + b'' y + c'' z,$$

una forma possibile per la soluzione del sistema (9). Sostituendo in questo, si ha:

$$a = b' = c'' = 0,$$
$$b'' + c' = 0, \quad c + a'' = 0, \quad a' + b = 0.$$

Posto quindi

$$b'' = -c' = p, \quad c = -a'' = q, \quad a' = -b = r,$$

(p, q, r costanti in tutto S) risulta

$$u = u_0 + q z - r y, \quad v = v_0 + r x - p z,$$
$$w = w_0 + p y - q x,$$

le quali spettano precisamente allo spostamento di un corpo rigido.

Dunque l'annullarsi delle $a, b, \ldots h$, porta con sè la mancanza di una vera e propria deformazione.

Si può ora dimostrare pure che:

due deformazioni aventi le stesse componenti non differiscono che per un moto di corpo rigido.

Dette infatti u', v', w'; u'', v'', w'' le componenti di spostamento della prima e della seconda, si ha

$$a = \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u''}{\partial x}; \text{ ecc.}$$

e se quindi poniamo $u = u' - u''$, ecc. si vede subito che le u soddisfanno al sistema (9): onde è vero ecc.

È finalmente assai facile determinare il significato delle componenti di deformazione. Consideriamo infatti un elemento parallelo all'asse x; sia ε_x il coefficiente di dilatazione: dalla (7), essendo in tal caso $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, risulta

$$\varepsilon_x = a; \text{ e così } \varepsilon_y = b, \ \varepsilon_z = c;$$

a, b, c sono i coefficienti di dilatazione lineare di elementi paralleli agli assi coordinati.

Sia ι_{yz} lo scorrimento mutuo delle rette condotte per M parallelamente ad y e z; la (8), essendo $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$; $\alpha' = \beta' = 0$, $\gamma' = 1$, ci dà

$$\iota_{yz} = f; \text{ e così } \iota_{zx} = g, \ \iota_{xy} = h;$$

f, g, h, sono gli scorrimenti mutui di rette parallele agli assi.

Queste componenti dunque dipendono e dal punto e dalla orientazione degli assi.

§ 4. Analisi della deformazione. — Poniamo

$$\left.\begin{aligned} 2p = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \ 2q = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ 2r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Colle (10) e le (6) potremo esprimere le nove derivate delle componenti di spostamento mediante le a, b, ... h, p, q, r. Infatti si ha subito

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} h - r, \ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} g + q, \text{ ecc.}$$

Sostituendo questi valori nelle (2) e ponendo

$$2\,\Phi(\xi, \eta, \zeta) = a\,\xi^2 + b\,\eta^2 + c\,\zeta^2 + f\,\eta\,\zeta + g\,\zeta\,\xi + h\,\xi\,\eta, \quad (11)$$

si ha

$$\left.\begin{aligned} \delta\,\xi &= u + q\,\zeta - r\,\eta + \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\xi} \\ \delta\,\eta &= v + r\,\xi - p\,\zeta + \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\eta} \\ \delta\,\zeta &= w + p\,\eta - q\,\xi + \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\zeta}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Analizziamo queste formule. Potremo decomporre le componenti suddette dello spostamento di un punto dell'intorno di M, in altri due spostamenti di componenti rispettive

$$\delta_0\,\xi = u + q\,\zeta - r\,\eta\,; \text{ ecc.}$$

e

$$\delta_1\,\xi = \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\xi}\,; \text{ecc.}$$

Il *primo spostamento è quello dovuto ad un moto di corpo rigido;* u, v, w rappresentano le componenti della traslazione; p, q, r quelle della rotazione della particella supposta rigida; la quale durante tale spostamento muta la sua orientazione senza deformarsi.

Le componenti del secondo spostamento sono le derivate parziali della funzione Φ; si dice che questo spostamento ammette un *potenziale.*

Consideriamo le quadriche, che diremo di *deformazione*,

$$2\,\Phi = \text{cost.}$$

e tra queste quella passante per N, il quale per effetto dello spostamento δ_1 si porterà in N_1; la $N N_1$ è normale alla quadrica. Questo secondo spostamento corrisponde adunque effettivamente ad una vera deformazione dell'elemento. Ad essa non corrisponde più nè traslazione, nè rotazione. Infatti il punto M (centro della quadrica) nella deformazione δ_1 resta fisso e, come si vede subito, è il solo che resti fisso; però *il secondo spostamento corrisponde al vero moto intestino della particella, e la deformazione, priva di rotazione e traslazione, dicesi pura.*

Le quadriche considerate hanno il centro in M; lo spostamento dei punti che stanno sugli assi, dovendo avvenire normalmente alla quadrica, avverrà lungo gli assi stessi; cioè:
esiste una terna di rette ortogonali che restano ortogonali dopo la deformazione, cioè i cui scorrimenti mutui sono nulli.

Queste si dicono rette *principali della deformazione relative ad M.*

Assumiamole come assi coordinati; allora

$$2\,\Phi = a_0\,\xi^2 + b_0\,\eta^2 + c_0\,\zeta^2$$

e quindi

$$\delta_1\,\xi = a_0\,\xi\,, \quad \delta_1\,\eta = b_0\,\eta\,, \quad \delta_1\,\zeta = c_0\,\zeta\,;$$

un punto qualunque si sposta parellamente agli assi di quantità proporzionali alle sue coordinate:

precisamente si può dire che subisce una estensione semplice secondo x misurata da a_0, ecc.

La deformazione pura consta adunque di tre estensioni semplici parallelamente a tre rette ortogonali.

Riepilogando dunque:

la deformazione infinitesima più generale di una particella consta di un moto di corpo rigido e di tre estensioni semplici secondo tre rette ortogonali.

Le tre grandezze a_0, b_0, c_0 diconsi *dilatazioni principali.*

Se sono tutte e tre dello stesso segno, la quadrica Φ è un ellissoide i cui diametri subiranno tutti una dilatazione o una contrazione.

La quadrica può anche essere un iperboloide ad una o a due falde: per deciderlo consideriamone il cono assintotico definito da

$$a\,\xi^2 + b\,\eta^2 + c\,\zeta^2 + f\,\eta\,\zeta + g\,\zeta\,\xi + h\,\xi\,\eta = 0.$$

Per la (7) si vede che gli elementi diretti secondo le generatrici di questo cono hanno $\varepsilon = 0$; abbiamo cioè il *cono delle dilatazioni nulle.* Se è immaginario, la quadrica Φ è un ellissoide; se è reale, esso divide lo spazio in due regioni in una delle quali gli elementi saranno dilatati e nell'altra contratti. In una regione la quadrica Φ è un iperboloide a una e nell'altra regione è un iperboloide a due falde.

Le quadriche di deformazione sono simili e similmente poste alle *quadriche di dilatazione,* che si ottengono riportando sui vari elementi uscenti da M segmenti eguali a $\sqrt{\pm\,\varepsilon}$.

Consideriamo una sfera σ ed un ellissoide e, che nella deformazione si mutino rispettivamente in un ellissoide e_1 ed in una sfera σ_1.

Gli assi di e, per note proprietà della trasformazione omografica, si trasformano negli assi di e_1; ciò che costituisce un'elegante proprietà delle rette principali.

Se la deformazione è pura, questi assi sono gli assi delle quadriche di deformazione; se no, il moto rigido definito da u, v, w, p, q, r porterà la terna di e sopra quella di e_1.

Assumendo per assi coordinati le rette principali, i semi-assi della quadrica di dilatazione sono $\sqrt{\pm a_0}$, ecc.; quelli di e sono $1 : a_0 + 1$, ecc.; e quelli di e_1 sono $a_0 + 1$, ecc. *.

§ 5. Ricerca delle dilatazioni principali. Invarianti di deformazione. — Per un punto posto su uno degli assi della quadrica Φ alla distanza 1 da M, deve aversi

$$\delta_1 \xi = \varepsilon \xi, \quad \delta_1 \eta = \varepsilon \eta, \quad \delta_1 \zeta = \varepsilon \zeta,$$

ε essendo il coefficiente di dilatazione lineare relativo a quell'asse; dunque sussisteranno le tre se-

* La quadrica delle dilatazioni; la considerazione delle rette principali è dovuta a Cauchy, l. c. in nota del § 1. La considerazione dell'ellissoide e, specialmente importante nel caso della deformazione omogenea finita, è dovuta a Lord Kelvin l. c. Il teorema generale sulla decomposizione della deformazione è in sostanza dovuto a Helmholtz nella memoria classica sull' idrodinamica: *Crelle's Journal*, **55**; 1858 e *Wissen. Abhand.*, I, p. 106, 136 e seg.

guenti equazioni lineari ed omogenee

$$\left.\begin{aligned}
&(a-\varepsilon)\xi+\frac{1}{2}h\eta+\frac{1}{2}g\zeta=0\\
&\frac{1}{2}h\xi+(b-\varepsilon)\eta+\frac{1}{2}f\zeta=0\\
&\frac{1}{2}g\xi+\frac{1}{2}f\eta+(c-\varepsilon)\zeta=0;
\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

e non potendo le ξ, η, ζ essere contemporaneamente nulle, sarà

$$\begin{vmatrix}
a-\varepsilon & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}g\\
\frac{1}{2}h & b-\varepsilon & \frac{1}{2}f\\
\frac{1}{2}g & \frac{1}{2}f & c-\varepsilon
\end{vmatrix}=0.\qquad(14)$$

Abbiamo cioè una equazione di 3° grado in ε, le cui radici sono tutte e tre reali e danno i valori delle dilatazioni principali a_0, b_0, c_0. Sostituendo nelle (13) al posto di ε successivamente a_0, b_0, c_0, troveremo i rapporti $\xi:\eta:\zeta$, e quindi i coseni direttori degli assi.

La (14) si può sviluppare agevolmente e con note regole; chè i coefficienti delle varie potenze di ε sono le somme dei minori principali di primo, secondo e terzo ordine del determinante (14) in cui si è fatto $\varepsilon=0$.

Abbiamo poi le note relazioni

$$\left.\begin{aligned} a_0 + b_0 + c_0 &= a + b + c \\ b_0 c_0 + c_0 a_0 + a_0 b_0 &= \sum (b c - \frac{1}{4} f^2) \\ a_0 b_0 c_0 &= abc + \frac{1}{4} fgh - \frac{1}{4} \sum a f^2. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

I secondi membri di queste eguaglianze non dipendono adunque dalla orientazione degli assi coordinati. Essi diconsi *invarianti fondamentali di deformazione* e, rispettivamente, invariante lineare, quadratico e cubico.

L'invariante lineare ha una semplice ed importante interpretazione. Consideriamo infatti un parallelepipedo di spigoli m, n, p situati lungo le rette principali e sia $V = m\,n\,p$ il suo volume.

Dopo la deformazione il parallelep. sarà ancora rettangolo; ma lo spigolo m sarà diventato $m\,(1 + a_0)$; ecc... quindi il volume V si sarà trasformato in un altro

$$V' = m\,n\,p\,(1 + a_0)\,(1 + b_0)\,(1 + c_0).$$

Diciamo *coefficiente di dilatazione cubica* il rapporto tra l'accrescimento di volume e il volume primitivo e accenniamolo con Θ; sarà

$$\Theta = \frac{V' - V}{V} = (1 + a_0)\,(1 + b_0)\,(1 + c_0) - 1$$

e quindi, nei soliti limiti di approssimazione,

$$\Theta = a_0 + b_0 + c_0 = a + b + c,$$

cioè:

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \tag{16}$$

l'invariante lineare di deformazione, cioè la somma dei coefficienti di dilatazione lineare secondo tre rette ortogonali, esprime il coefficiente di dilatazione cubica nell'intorno del punto M.

Si può mostrare che qualsiasi invariante di deformazione è una funzione degli invarianti fondamentali e in particolare qualsiasi invariante razionale ed intero delle sei componenti di deformazione deve essere una funzione razionale intera dei tre fondamentali.

Se il sistema ruota intorno ad un asse, p. e. z, c è un invariante e quindi anche $a + b$; di guisa che:

$$c\,(a + b)\,, \quad (a + b)^2,\ c^2$$

sono tre *invarianti quadratici di rotazione.*

L'invariante quadratico e cubico potendo scriversi

$$c\,(a + b) + a\,b - \frac{1}{4}(f^2 + g^2 + h^2)$$

$$c\left(a\,b - \frac{1}{4}h^2\right) + \frac{1}{4}f\,g\,h - \frac{1}{4}a\,f^2 - \frac{1}{4}b\,g^2;$$

dal secondo si conclude che $a\,b - \frac{1}{4}h^2$ è un invariante e dal primo, che lo è pure $f^2 + g^2$. Abbiamo dunque altri due invarianti

$$a\,b - \frac{1}{4}h^2,\ f^2 + g^2,$$

ed in tutto *cinque* (*e solo cinque*) *invarianti quadratici di rotazione.* È anche invariante

$$(a+b)^2 - 4\left(a\,b - \frac{1}{4}h^2\right) = (a-b)^2 + h^2 \;*.$$

Un altro invariante, non di deformazione, è, pel suo stesso significato,

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2;$$

esso chiamasi un *polinomio isotropo* di 2.° grado, cioè un polinomio di 2.° grado rispetto alle nove derivate di u, v, w, che non cambia per un cambiamento d'assi.

Naturalmente anche

$$(a+b+c)^2, \quad \Sigma\left(b\,c - \frac{1}{4}h^2\right)$$

sono polinomi isotropi di 2.° grado, come pure qualunque loro combinazione. Due tra queste sono notevoli; combinando infatti l'invariante quadratico ed ω^2, si trova il polinomio isotropo

$$\Sigma\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right);$$

e combinando questo con ω^2 e col quadrato dell'invariante lineare si trova l'altro polinomio isotropo

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \ldots.$$

---

* Beltrami: *Note fisico-matematiche*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **3**; 1889. Somigliana: *Sul potenziale elastico.* Ann. d. Matem. **7**; 1902.

Si può inoltre dimostrare che non esistono altri polinomi isotropi di 2.° grado linearmente indipendenti dai primi tre. *

§ 6. Relazioni fra le componenti di deformazione. — Date ad arbitrio sei funzioni a, b, ... h di x, y, z, possono queste assumersi come componenti di deformazione di un corpo continuo?

In generale no; perchè tra le componenti debbono sussistere delle relazioni. Infatti a quelle deve corrispondere uno spostamento possibile; devono cioè esistere le u, v, w. Ora:

$$d\,u = \frac{\partial u}{\partial x} d\,x + \ldots =$$

$$= a\,d\,x + \left(\frac{1}{2} h - r\right) d\,y + \left(\frac{1}{2} g + q\right) d\,z$$

e perchè il secondo membro sia un differenziale esatto, cioè affinchè esista la u, è necessario e basta che

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2} h - r\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2} g + q\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} g + q\right) = \frac{\partial a}{\partial z}, \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} h - r\right),$$

le quali, notando che:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0,$$

---

* POINCARÉ: *Leçons sur la Th. d. l'élasticité.* Paris, 1892, pag. 20.

si possono scrivere così:

$$2\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z};\quad 2\frac{\partial q}{\partial x}=2\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial x};$$

$$2\frac{\partial r}{\partial x}=-2\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x};$$

insieme colle quali varranno pure le

$$2\frac{\partial p}{\partial y}=-2\frac{\partial b}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y};\quad 2\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial x};$$

$$2\frac{\partial r}{\partial y}=2\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial y};\quad 2\frac{\partial p}{\partial z}=2\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z};\ \text{ecc.}$$

le quali assicurano l'esistenza di v e w. Ma le derivate di p ci danno il mezzo di conoscere dp e per la esistenza di p è necessario e basta siano soddisfatte le

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-2\frac{\partial b}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-2\frac{\partial b}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Riducendo:

$$\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z};$$

$$2\frac{\partial^2 c}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right);$$

$$2\frac{\partial^2 b}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right).$$

Con permutazioni circolari da queste ne otterremo altre sei che, come subito si vede, non sono tutte distinte; sicchè le relazioni cui si giunge sono, in definitiva,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\,;\quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial z\,\partial x}\\
&\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\\
&2\frac{\partial^2 a}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\
&2\frac{\partial^2 b}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)\\
&2\frac{\partial^2 c}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Queste relazioni, dovute al Saint-Venant *, sono necessarie e sufficienti per l'esistenza delle u, v, w.

§ **7. Formule di trasformazione.** — Dalla terna ortogonale x, y, z si passi all'altra, pure ortogonale x', y' z', fissata rispetto alla prima dai nove

* La dimostrazione qui riportata è del Beltrami; nota in fine alla mem. *Sull'interp. mecc. d. form. d. Maxwell.* Mem. Acc., Bologna, **7**; 1886. Vedi pure le citate *Note fisico-mat.* e *Comp. Rend.*, **108**, p. 502, 1889; e la citata monogr. dei signori Cosserat, p. 35-36.

Sulle varie decomposizioni di cui sono suscettibili le u, v, w, e sulle quali non abbiamo creduto dover insistere, non occorrendo al nostro scopo, vedi Cesàro: l. c., Cap. x, p. 88.

coseni:

$$\cos(x\,x') = \alpha_1,\ \cos(y\,x') = \beta_1,\ \cos(z\,x') = \gamma_1,\ \text{ecc.}$$

Diciamo a', b',... h' le componenti di deformazione relative alla seconda terna; vogliamo esprimerle mediante le a, b... h e i nove coseni direttori.

Poichè:

$$a' = \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial u'}{\partial y}\beta_1 + \frac{\partial u'}{\partial z}\gamma_1 =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial v}{\partial x}\beta_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\gamma_1\right)\alpha_1 + \ldots$$

risulta:

$$a' = \alpha_1^2 a + \beta_1^2 b + \gamma_1^2 c + \beta_1\gamma_1 f + \gamma_1\alpha_1 g + \alpha_1\beta_1 h$$

e così per b' e c'. Inoltre:

$$f' = 2\alpha_2\alpha_3 a + 2\beta_2\beta_3 b + 2\gamma_2\gamma_3 c + (\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2)f + \ldots$$

ecc.

Scambiando tra loro le due terne si esprimerebbero agevolmente le a, b... h per le a'... h'. Diciamo γ_{rs} gli elementi del determinante formato coi coefficienti delle a, b... h. Il determinante, che diremo Γ, gode di due notevoli proprietà che vogliamo notare. Moltiplicando la 4ª, 5ª, 6ª colonna per $\sqrt{2}$ e dividendo al tempo stesso la 4ª, 5ª, 6ª linea per $\sqrt{2}$, Γ non si altera e le sue linee

hanno per elementi

$$\alpha_1^2,\ \beta_1^2,\ \gamma_1^2,\ \sqrt{2}\,\beta_1\gamma_1,\ \sqrt{2}\,\gamma_1\alpha_1,\ \sqrt{2}\,\alpha_1\beta_1,\ \text{ecc....}$$

$$\sqrt{2}\,\alpha_2\alpha_3,\ \sqrt{2}\,\beta_2\beta_3,\ \sqrt{2}\,\gamma_2\gamma_3,\ \alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2,\ \text{ecc....}$$

Ma allora è chiaro che:
il quadrato di ciascuna linea è eguale ad uno.
Infatti

$$\alpha_1^4+\beta_1^4+\gamma_1^4+2\beta_1^2\gamma_1^2+2\gamma_1^2\alpha_1^2+2\alpha_1^2\beta_1^2=$$
$$=(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)^2=1$$
$$2\alpha_2^2\alpha_3^2+2\beta_2^2\beta_3^2+2\gamma_2^2\gamma_3^2+(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)^2+\ldots$$
$$=(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2)+$$
$$+(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3)^2=1;$$

così facilmente si prova che:
il prodotto di due linee è eguale a zero.
Il determinante è dunque ortogonale; quindi

$$\Gamma^2=1.$$

Inoltre $\Gamma\alpha_1^2$, per note proprietà dei determinanti ortogonali, è eguale all'elemento aggiunto di α_1^2; cioè ad un determinante le cui linee sono

$$\beta_1^2,\ \gamma_1^2,\ \sqrt{2}\,\beta_1\gamma_1,\ \sqrt{2}\,\gamma_1\alpha_1,\ \sqrt{2}\,\alpha_1\beta_1,\ \text{ecc....}$$
$$\sqrt{2}\,\beta_2\beta_3,\ \sqrt{2}\,\gamma_2\gamma_3,\ \alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2,\ \text{ecc....}$$

e se moltiplichiamo 3ª, 4ª, 5ª colonna e dividiamo 3ª, 4ª, 5ª linea per $\sqrt{2}$, risulta:

$$\Gamma\gamma_{11}=\Gamma_{11},$$

essendo Γ_{11} l'elemento aggiunto di γ_{11} in Γ; lo stesso dicasi naturalmente per ogni altro elemento. Dunque:

il determinante Γ *gode delle due proprietà fondamentali dei determinanti ortogonali* *.

§ 8. Pressioni interne in un corpo continuo. — Un corpo continuo soggetto a forze che sollecitano ogni elemento di massa e a forze distribuite in superficie (pressioni, trazioni continue o no) sia in equilibrio. Nel suo interno si svilupperanno altre forze che reagiranno a quelle tendenti a deformare il corpo. Queste nuove forze diconsi *pressioni interne*. Cerchiamo anzitutto, sempre prescindendo dalla speciale natura fisica del corpo, di assegnare qualche loro carattere generale. Ci fonderemo costantemente su di un *postulato*.

Supponiamo tagliato il corpo, dopo che è stato deformato ed equilibrato, con una superficie qualunque, p. es. un piano, in due parti A e B e che sia rimossa una delle due parti.

Ammetteremo che *l'equilibrio possa essere ristabilito, distribuendo sul piano di separazione delle forze univocamente determinate punto per punto.*

Sia M un punto della superficie di separazione $d\sigma$ un elemento d'area di questa intorno ad M. La forza da applicare in M, univocamente determinata, è dello stesso ordine dell'area $d\sigma$ e dipenderà dalla posizione dell'elemento e dalla sua orientazione. La orientazione sarà definita dalla

---

* Voigt, *Allg. Formeln f. die Bestimmung u. s. w.* Wiedemann's Ann., **16**, 1882, p. 273; 398.

normale n all'elemento, assunta come direzione positiva quella diretta verso l'interno della parte del corpo che si considera.

Accenneremo con $F_n\, d\sigma$ tale forza, volendo con ciò indicare che essa è dello stesso ordine dell'elemento la cui normale è n; e così accenneremo con

$$X_n\, d\sigma,\ Y_n\, d\sigma,\ Z_n\, d\sigma$$

le componenti di questa forza.

La F_n si chiama *pressione interna* nel punto M sull'elemento $d\sigma$ e le X_n, Y_n, Z_n, una qualunque delle quali accenneremo con U_n, diconsi *componenti ortogonali di pressione.*

La componente normale di F_n cioè la componente secondo la normale n, sarà accennata con N_n e secondo che essa è positiva, negativa o nulla si dice che l'elemento $d\sigma$ è soggetto ad una pressione, trazione o ad una forza tangenziale. Si ammette poi, come un dato fisico, che queste pressioni varino con continuità, generalmente, nell'interno del corpo.

Ha luogo il seguente teorema.

Le pressioni interne in un corpo continuo soddisfano alla legge dell'azione eguale e contraria alla reazione.

Cioè la forza da applicare a $d\sigma$ quando è tolta la parte A, è eguale e contraria a quella che occorre applicare sopra lo stesso elemento quando invece si toglie B, conservando A.

Infatti isoliamo nel corpo un cilindro di cui siano σ, σ' le basi; σ'' la superficie laterale; n, n' n'' le rispettive normali volte verso l'interno del ci-

lindro. L'equilibrio sarà ristabilito se distribuiremo in ogni punto di σ, σ', σ'' delle forze F_n, $F_{n'}$, $F_{n''}$.

Sotto l'azione di queste forze distribuite in superficie e delle forze di massa, il cilindro, come il corpo, è in equilibrio e questo, a *fortiori*, sussisterà ancora supponendo il cilindro irrigidito. Sia U una qualunque delle forze di massa (riferita all'unità di massa); $d\tau$ un elemento di volume e ρ la densità. Esprimendo dunque che è nulla la somma delle componenti di tutte le forze secondo uno qualunque degli assi, sarà

$$\int U_n \, d\sigma + \int U_{n'} \, d\sigma' + \int U_{n''} \, d\sigma'' + \int \rho \, U d\tau = 0.$$

Ma σ è lo stesso di σ'; passando quindi al limite facendo avvicinare indefinitamente σ e σ' e notando che i due ultimi integrali tendono a zero si ha

$$\int (U_n + U_{n'}) \, d\sigma = 0;$$

questa deve aver luogo qualunque sia σ; onde deve essere

$$U_n + U_{n'} = 0$$

e poichè $n' = -n$ possiamo dire che:

$$F_n + F_{-n} = 0. \qquad (18)$$

§ **9. Componenti speciali di pressione. Teorema fondamentale di Cauchy.** — Nel punto M consideriamo un elemento $d\sigma_x$ parallelo al piano yz. Le componenti della pressione di questo elemento piano la cui normale è l'asse x positivo si indicheranno con

$$X_x, \; Y_x, \; Z_x.$$

Parimenti accenneremo con

$$X_y\,,\ Y_y\,,\ Z_y$$

le componenti della pressione su di un elemento $d\sigma_y$ parallelo al piano zx e la cui normale è l'asse y positivo e finalmente con

$$X_z\,,\ Y_z\,,\ Z_z$$

quelle della pressione su di un elemento $d\sigma_z$ parellelo al piano xy la cui normale è l'asse z positivo. Le nove grandezze così definite, evidentemente funzioni delle sole coordinate del punto M, diconsi le *componenti speciali di pressione relative alla terna uscente da M.*

Le componenti di pressione relative ad un altro elemento qualunque passante per M dipendono, in generale, e dalla posizione del punto e dai coseni direttori dell'elemento; ma mentre non si sa assegnare la legge della loro dipendenza da x, y, z, si può invece assegnare il modo con cui dipendono dai coseni direttori.

Infatti ha luogo il seguente teorema generale di Cauchy:

le componenti di pressione su di un elemento piano di un corpo continuo in equilibrio sono funzioni lineari ed omogenee dei coseni direttori della normale all'elemento e delle componenti speciali di pressione.

Si tagli il triedro che in M formano le parallele agli assi con un piano qualunque e siano A, B, C i punti d'incontro coi tre assi x, y, z; iso-

liamo dal corpo questo tetraedro, distribuendo, su tutte le sue facce, forze opportune onde ristabilire l'equilibrio. Su ABC assumo un elemento d'area $d\sigma'$, la cui normale volta verso l'interno del tetraedro sia n e sia U'_n una delle relative componenti di pressione; proiettiamo $d\sigma'$ in $d\sigma_x$ sul piano yz; una qualunque delle componenti di pressione relativa a $d\sigma_x$ sarà accennata con U'_x se A cade sulle x positive oppure con U'_{-x} [eguale ad $-U'_x$ in virtù della (18)] nel caso contrario. Nel primo caso l'angolo (n, x) essendo ottuso si ha

$$d\sigma_x = -d\sigma' \cos(n, x);$$

nel secondo è acuto e quindi

$$d\sigma_x = d\sigma' \cos(n, x).$$

In ambo i casi il prodotto delle componenti U' per l'elemento d'area è espresso da

$$-U'_x \cos(n, x)\, d\sigma'.$$

Lo stesso dicasi per le altre due facce; tenendo poscia conto delle forze di massa, una delle condizioni dell'equilibrio del tetraedro, supposto rigido, è

$$\int \rho\, U d\tau + \int \{U'_n - U'_x \cos(n, x) - \ldots\}\, d\sigma' = 0.$$

Accenniamo con U i valori delle U' relativi ad elementi contigui al punto M ed orientati rispettivamente come il piano ABC e i piani coordi-

nati; e si ponga in generale

$$U'_n = U_n + \delta U_n .$$

Le U che si riferiscono al punto M fisso sono indipendenti dalla integrazione relativa a σ'; abbiamo dunque

$$[U_n - U_x \cos(n,x) - U_y \cos(n,y) - U_z \cos(n,z)]\sigma' +$$
$$+ \int \{\delta U_n - \delta U_x \cos(n,x) - \ldots\} d\sigma' + \int \rho U d\tau = 0.$$

Dividiamo per σ' e notiamo che il volume τ del tetraedro è espresso (h essendo l'altezza) da $\frac{1}{3} h\sigma'$; facciamo poi avvicinare indefinitamente il piano ABC al punto M mantenendolo parallelo a sè stesso; σ' e τ tendono a zero insieme con h. Il terzo termine dell' equazione precedente, diviso per σ', è il prodotto di $\frac{1}{3} h$ per $\int \rho U d\tau : \tau$.

Il quoziente dell'integrale per τ, esprimendo il valor medio di ρU nel volume τ, è finito e col tendere di h a zero il prodotto precedente tende a zero.

Lo stesso ha luogo pel secondo termine, a causa della continuità delle pressioni: dunque al limite otteniamo

$$U_n = U_x \cos(n,x) + U_y \cos(n,y) + U_z \cos(n,z), \quad (19)$$

che esprime appunto il teorema di Cauchy.

Se, per compendio, diciamo α, β, γ i coseni direttori della normale all'elemento piano passante per M e diretta come si è convenuto, la (19) equi-

vale alle altre tre

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \alpha X_x + \beta X_y + \gamma X_z \\ Y_n &= \alpha Y_x + \beta Y_y + \gamma Y_z \\ Z_n &= \alpha Z_x + \beta Z_y + \gamma Z_z . \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Quindi se in ogni punto M conosciamo le componenti speciali di pressione, data la orientazione di un elemento è nota la pressione di quell'elemento e reciprocamente. Di guisa che la conoscenza delle pressioni dell'intorno di M è caratterizzata da quella delle sole componenti speciali.

§ 10. Equazioni indefinite per l'equilibrio di un corpo continuo. — Da un corpo continuo isoliamo una porzione qualunque con una superficie σ; la porzione così staccata (deformata ed equilibrata) è in equilibrio per le forze F_n in superficie e per le forze di massa. Applicando adunque la solita considerazione si ha

$$\int \rho\, U\, d\tau + \int U_n\, d\sigma = 0.$$

Ma per la (19):

$$\int U_n\, d\sigma = \int (U_x \cos(n\,x) + \ldots)\, d\sigma =$$

$$= -\int \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) d\tau$$

per la trasformazione di Gauss. Dunque

$$\int \left(\rho\, U - \frac{\partial U_x}{\partial x} - \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) d\tau = 0,$$

ed il volume τ essendo affatto arbitrario, risulterà

$$\rho\, U = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \qquad (21)$$

in cui $U = X, Y, Z$. Le (21), che valgono per qualunque punto interno al corpo, diconsi *equazioni indefinite per l'equilibrio.*

Per l'equilibrio della porzione racchiusa da σ supposta rigida, debbono essere verificate altre tre equazioni, cioè quelle dei momenti: dunque sarà, ad esempio,

$$\int \rho\,(y\,Z - z\,Y)\,d\tau + \int (y\,Z_n - x\,Y_n)\,d\sigma = 0.$$

E quindi, allo stesso modo con cui fu dedotta la (21), si ha

$$\rho\,(y\,Z - z\,Y) = \sum \frac{\partial\,(y\,Z_x - z\,Y_x)}{\partial x};$$

sviluppando e tenendo presenti le (21), si ricavano le

$$Y_z = Z_y\,, \quad Z_x = X_z\,, \quad X_y = Y_x\,; \qquad (22)$$

cioè *le componenti speciali di pressione si riducono, in generale, a sei distinte.*

Le equazioni fondamentali (19) e (21) non bastano a determinare le sei componenti speciali: esse quindi sono solamente necessarie per l'equilibrio di un qualunque corpo continuo.

Le equazioni suddette, supponendo il corpo già deformato ed equilibrato, debbono inoltre intendersi nel senso che ρ, x, y, z, Z,... si riferi-

scano alla posizione deformata del corpo; e se facciamo l'ipotesi che tale deformazione sia infinitesima, esse possono riferirsi indifferentemente alla posizione non deformata, come si vede con un semplice sviluppo in serie.

Nel caso che la deformazione sia finita, assai importante per alcune teorie di fisica matematica, si possono trasformare le suddette equazioni in altre relative alle coordinate del corpo non deformato *.

§ 11. Componente normale di pressione. Ellissoide di Lamé e quadriche delle pressioni. — La teoria delle pressioni interne riceve una forma assai elegante ricorrendo, come nella teoria della deformazione, ad alcune rappresentazioni geometriche.

La N_n cioè la componente, sulla normale all'elemento, della pressione esercitata su $d\sigma$ è data da

$$N_n = \alpha X_n + \beta Y_n + \gamma Z_n . \tag{23}$$

Sostituendo in questa i valori (20), tenuto conto delle (22), otteniamo:

$$\left.\begin{aligned} N_n = \alpha^2 X_x + \beta^2 Y_y + \gamma^2 Z_z + 2\beta\gamma Y_z + \\ + 2\gamma\alpha Z_x + 2\alpha\beta X_y ; \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

la componente normale di pressione è una fun-

---

* Su questa trasformazione, dovuta al Boussinesq e Brillouin, vedasi la citata mem. dei signori Cosserat, p. 40.

Circa poi la maniera più generale di soddisfare alle (19), (21) vedasi: Morera: *Soluz. gener. d. equaz indef. dell'equilibrio di un corpo cont.* Rend. Acc. Linc. 1, 1892, p. 137; 233.

zione quadratica omogenea dei coseni direttori dell'elemento.

Ma dalla (23) e dalle (20) eliminando α, β, γ otteniamo pure

$$\begin{vmatrix} N_n & X_n & Y_n & Z_n \\ X_n & X_x \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

onde

$$N_n = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & X_n & Y_n & Z_n \\ X_n & X_x \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \qquad (25)$$

essendo Δ il determinante (in generale diverso da zero) formato colle componenti speciali; quindi: *la componente normale di pressione è una funzione quadratica omogenea delle componenti ortogonali di pressione.*

Derivando la (24) rispetto ad α, β, γ si deduce subito che

$$X_n = \frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial \alpha}, \quad Y_n = \frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial \beta}, \quad Z_n = \frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial \gamma}. \qquad (26)$$

Notando poscia che

$$d N_n = \sum \alpha \, d X_n + \sum X_n \, d \alpha =$$

$$= \sum \alpha \, d X_n + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial N_n}{\partial \alpha} d \alpha$$

in virtù delle (26); e che quindi

$$d\,N_n = \sum \alpha\, d\,X_n + \frac{1}{2}\, d\,N_n\,,$$

risulterà

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial X_n}\,,\quad \beta = \frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial Y_n}\,,\quad \gamma = \frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial Z_n} \qquad (27)$$

cioè

le componenti ortogonali (o i coseni direttori) della pressione sono le semiderivate della componente normale rispetto ai coseni direttori (o alle componenti ortogonali).

Ciò premesso veniamo alla rappresentazione geometrica.

A partire da M si costruisca il vettore F_n relativo ad un qualunque elemento piano passante per M, di normale n; rispetto agli assi passanti per M siano ξ, η, ζ le coordinate dell'estremo di F_n; quindi

$$\xi = X_n\,,\quad \eta = Y_n\,,\quad \zeta = Z_n$$

e per la (25) risulterà N_n una funzione quadratica ed omogenea delle ξ, η, ζ. Diciamola $2\,\varphi$; cioè poniamo

$$N_n = 2\,\varphi\,(\xi,\ \eta,\ \zeta). \qquad (28)$$

Le (27) diventano

$$\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\,,\quad \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\,,\quad \gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$$

e colla eliminazione di α, β, γ otteniamo

$$2\psi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)^2 - 1 = 0 \quad (29)$$

Dunque il luogo degli estremi di F_n è un ellissoide $2\psi = 0$, i cui semidiametri danno le grandezze delle pressioni esercitate su elementi piani passanti pel centro dell'ellissoide. Esso dicesi *ellissoide di Lamé.* Consideriamo ancora le quadriche

$$\varphi = \text{cost}$$

che diconsi *quadriche di pressione;* e tra queste quella passante pel punto ξ, η, ζ; la normale in quel punto avendo coseni direttori proporzionali alle derivate di φ, è parallela alla direzione α, β, γ. Dunque l'elemento piano su cui si esercita la pressione F_n è coniugato alla F_n stessa rispetto alle quadriche $\varphi = \text{cost}$.

Dato un piano passante per M, il suo diametro coniugato rispetto alle quadriche di pressione dà la direzione della pressione e la porzione che su questa taglia l'ellissoide di Lamé dà la grandezza della pressione che si esercita sul piano.

Reciprocamente data la direzione della pressione si può trovare il piano su cui essa si esercita.

L'ellissoide di Lamé e le quadriche di pressione hanno lo stesso centro e le stesse direzioni degli assi.

Il centro comune è infatti il punto M; supposto poi riferite le quadriche φ ai loro assi, ridotta cioè φ alla forma

$$2\varphi = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2,$$

si vede subito che la stessa forma spetta alla ψ.

Se infine sulla direzione n riportiamo un segmento eguale alla reciproca di $\sqrt{\pm N_n}$, la sua estremità, al variare di n, descriverà la quadrica

$$X_x x^2 + \ldots + 2\, Y_z\, y\, z + \ldots = \pm 1 \qquad (30)$$

simile e similmente posta rispetto alle quadriche di pressione, e che fa perfetto riscontro alla quadrica delle dilatazioni.

§ 12. Elementi principali di pressione. Pressioni principali. — Siano ξ, η, ζ, gli assi delle ψ e φ: il diametro coniugato con $\eta\,\zeta$ essendo l'asse ξ, questo dà la direzione della pressione che si esercita su $\eta\,\zeta$; onde:

per ogni punto di un corpo continuo esistono in generale tre elementi piani tra loro ortogonali e soggetti a sole pressioni normali.

Essi diconsi *elementi principali di pressione*; e le pressioni relative (semiassi dell' ellissoide di Lamé) diconsi *pressioni principali.*

Se le quadriche φ sono sfere, anche ψ è una sfera: su ogni elemento piano per M si esercita una pressione normale che è sempre la stessa. Tale è il caso dei fluidi.

Diciamo P_1, P_2, P_3 le tre pressioni principali. L'equazione dell'ellissoide di Lamé è

$$\frac{\xi^2}{P_1{}^2} + \frac{\eta^2}{P_2{}^2} + \frac{\zeta^2}{P_2{}^3} = 1.$$

Rispetto alla terna degli elementi principali è

$$X_x = P_1, \quad Y_y = P_2, \quad Z_z = P_3$$

e tutte le altre componenti speciali sono nulle quindi

$$X_n = \xi = \alpha P_1 ; \quad Y_n = \eta = \beta P_2, \quad Z_n = \zeta = \gamma P_3 :$$

$$N_n = \alpha^2 P_1 + \beta^2 P_2 + \gamma^2 P_3$$

cioè

$$N_n = 2\varphi = \frac{\xi^2}{P_1} + \frac{\eta^2}{P_2} + \frac{\zeta^2}{P_3} ;$$

dunque l'equazione delle quadriche di pressione è

$$\frac{\xi^2}{P_1} + \frac{\eta^2}{P_2} + \frac{\zeta^2}{P_3} = \text{cost.}$$

Il cono assintotico di queste quadriche è tale che per i suoi elementi piani tangenti la $N_n = 0$: cioè questi elementi subiscono una pressione tangenziale.

La ricerca delle pressioni principali e degli invarianti di pressione si fa in modo del tutto identico a quello del § 5.

Infatti se P è una pressione principale si ha

$$X_n = P\alpha = \alpha X_x + \beta X_y + \gamma X_z ; \text{ ecc.}$$

e quindi

$$\alpha (X_x - P) + \beta X_y + \gamma X_z = 0, \text{ ecc.}$$

Il determinante dei coefficienti di queste tre equazioni è nullo e conduce alla ben nota equazione cubica in P a radici reali, ecc.

L'espressione

$$X_x + Y_y + Z_z = P_1 + P_2 + P_3$$

è un *invariante lineare di pressione* e così avremo un *invariante quadratico e cubico* *.

---

* Il teorema (18); la considerazione delle componenti speciali di pressione e delle pressioni principali; l'impiego del tetraedro elementare e della quadrica (30) sono dovuti a CAUCHY, che ha quindi fondato l'analisi delle pressioni. *Anc. Exerc.*, 1827, *Oeuvr.* 7 (2), p. 60.

La considerazione delle altre quadriche è dovuta a LAMÉ: *Mem. sur l'équilibre int. des corps solides homog.* par Lamé et Clapeyron. Mém. présentés p. div. sav. à l'Ac. d. Sciences, 4, 1833.

CAPITOLO QUARTO.

LE EQUAZIONI DELL'EQUILIBRIO E DEL MOTO DEI CORPI ELASTICI ISOTROPI

§ 1. Proprietà elastiche della materia. Legge sperimentale di Hooke. — Quando un corpo solido è soggetto all'azione di un sistema di forze in equilibrio, si osservano certi fenomeni dipendenti dalla natura e dalla grandezza della forza applicata ad ogni singolo elemento: come p. es. il cambiamento di temperatura, la deformazione, ecc.

Se ogni nuova configurazione del corpo non è in equilibrio senza l'aggiunta di nuove forze, il corpo dicesi *elastico:* in un corpo siffatto occorre una continua applicazione di forze per mantenere ogni alterazione di forma o di volume.

La deformazione *puramente elastica* è quella che cessa, tolto il carico che la produceva: ogni altra deformazione dicesi *permanente.* Il principio fondamentale e puramente sperimentale su cui poggia la teoria matematica dell'elasticità è costituito dalla legge di Hooke (1660):

la deformazione prodotta è proporzionale al carico che la produce (ut tensio sic vis):
in altre parole:
le componenti di pressione sono funzioni lineari ed omogenee delle componenti di deformazione.

Questa legge è stata sperimentalmente riconosciuta vera (almeno entro limiti assai vasti) per tutti i corpi; sembra in difetto pel ferro gettato e per altri metalli pure gettati.

§ **2. Corpi isotropi ed anisotropi. Moduli di elasticità.** — Se un corpo non presenta differenze nelle qualità elastiche dipendenti da direzione dicesi *isotropo;* altrimenti è *anisotropo.*

Sono isotropi i metalli; i cristalli, invece, il legno, sono anisotropi. Lo stesso sistema di pressioni applicato a due cubi o a due sfere eguali tagliate in modo qualunque da un corpo isotropo, produce la stessa deformazione; che è invece diversa se il corpo è anisotropo.

Un'asta isotropa sotto l'azione di un peso che la distende, si allunga e nello stesso tempo si contrae; se invece è anisotropa si contorce.

Sotto una pressione P (per unità d'area) un'asta isotropa, come si è detto, si allunga; dicasi ε il coefficiente di dilatazione lineare; l'esperienza ha dimostrato (legge di Hooke) che esso è proporzionale a P; e che la contrazione o meglio il coefficiente di contrazione η è pure proporzionale a P e quindi ad ε.

Così per il nichel il prof. Cantone trovò che per un aumento di kg. 1,093; 1,075; 0,813 la corrispondente dilatazione, in una certa scala, era misurata da 7,00; 6,90; 5,26; in questi casi il rap-

porto risulta rispettivamente eguale a 6,40; 6,42; 6,47 *.

Dunque possiamo porre:

$$P = E\varepsilon; \quad \eta = \varkappa\varepsilon. \tag{1}$$

I due coefficienti E e $\varkappa$ sono sempre gli stessi per uno stesso corpo isotropo a temperatura costante e variano da corpo a corpo **.

Il primo dicesi *modulo di Young* ed in generale è assai grande; i valori maggiori si hanno per l'acciaio, in cui varia, secondo le diverse specie, da 2100 a 1804. Questi moduli (come sempre in seguito) sono espressi in grammi per cm^2, a meno del fattore 10^6.

La costante $\varkappa$ (rapporto tra la contrazione e l'allungamento) dicesi *rapporto di Poisson*. E e

---

* I numerosi lavori del prof. Cantone sono pubblicati nei *Rend. Accad. Lincei;* vedi specialmente gli anni 1888, 1889. Vedi pure: Brillouin, *Les écarts apparents de la loi de Hooke*, Annales de Chimie et de Physique, **13**; 1898, et *Théorie des déformations permanentes des métaux industriels*, ibidem.

** La legge di Hooke, dopo gli esperimenti classici di Wertheim, Morin, Edlund, Miller, è stata oggetto anche di altre delicatissime esperienze da parte del sig. J. O. Thompson, *Wiedmann's Annales*, **44**, p. 555, 1891. Dalle sue ricerche risulterebbe che anche per minimi pesi la legge suddetta è verificata appena approssimativamente. Furono quindi proposte varie altre leggi tra le quali è da citare la legge delle potenze

$$P = E\varepsilon^m$$

in cui m e E sono costanti per uno stesso materiale ma che non hanno lo stesso valore secondo si tratta di pressione o

$\varkappa$ poi genericamente diconsi *costanti isotermiche* o *moduli di elasticità*. Se $\varkappa$ diventa negativo invece di una contrazione abbiamo un rigonfiamento; come accade p. e. nel caucciù e in alcuni corpi anisotropi. Come sarà dimostrato al § 3 si ha la seguente limitazione:

$$-1 < \varkappa < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Precisamente è: $\varkappa = \frac{1}{2}$, se il corpo è incompressibile; per la qualità rossa del caucciù vulcanizzato $\varkappa$ varia poco e si mantiene vicino a $-\frac{1}{2}$.

Navier, Poisson, (vedi Capitolo seguente) ritenevano che per ogni corpo isotropo fosse:

$$\varkappa = \frac{1}{4}.$$

---

di trazione; p. e. m è compreso tra $+1$ e 2 per il rame e i corpi in cemento, mentre per i metalli si avvicina assai ad 1 conforme alla antica legge di Hooke.

Vedi a tal proposito: Mehmke: *Zum Gesetz der elastischen Dehnungen*, Zeitschrift f. Mathem. u. Physik. **44**, pag. 327 1897, in cui oltre ad una numerosa bibliografia trovasi uno studio comparativo tra la formula della potenza e le altre.

Le esperienze del sig. Thompson sembrano quindi aver resa necessaria una estensione della teoria classica dell'elasticità e secondo la quale si dovrebbero introdurre nell'espressione del potenziale termini di terzo grado nelle componenti di deformazione. Riguardo a questa teoria pei corpi isotropi si vegga: Voigt, *Nachrichten v. d Kön. d. Wiss. zu Göttingen*, 1893, p. 534 e 1894, p. 33.

Lamé, Green ritenevano invece $\varkappa$ variabile da corpo a corpo; e noi ci conformeremo a questa idea. La questione è difficile ad essere risoluta sperimentalmente a causa della difficoltà di procurarsi materiale perfettamente isotropo. Ciò spiega perchè varii sperimentatori non si siano trovati di accordo.

Wertheim (1848) esperimentando il vetro ed il rame trovò $\varkappa$ più vicino ad $^1/_3$ che ad $^1/_4$. Kirchhoff (1859) per l'acciaio trovò $\varkappa = 0{,}294$.

Amagat (1889) pel vetro trovò circa $\frac{1}{4}$, pel piombo 0,428. Parimenti per ogni sorta di vetro il Cornu ed il prof. Cantone trovarono circa $^1/_4$. Finalmente le ultime esperienze del prof. Cardani hanno dato per il rame $\varkappa = 0{,}374$; per l'ottone 0,374; per il ferro 0,321 *.

In luogo delle due costanti E e $\varkappa$ il Lamé ne adopera altre due definite dalle:

$$\lambda = \frac{E\varkappa}{(1+\varkappa)(1-2\varkappa)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\varkappa)}. \tag{3}$$

La costante μ, per una ragione che vedremo nel § 5, è detta da Lord Kelvin *modulo di rigidità*. Dalle (3) inversamente si deduce:

$$\varkappa = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}; \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}. \tag{4}$$

---

* P. Cardani. *Determinazione diretta del rapporto di Poisson nei fili metallici.* Il Nuovo Cimento, **5**, pag. 73, 1903.

Intanto dalla seconda delle (3) risulta μ positivo; mentre λ ha lo stesso segno di $\varkappa$; e quindi $\lambda + \mu$ e $3\lambda + 2\mu$ saranno positivi.

Abbiamo dunque:

$$\mu > 0\,, \quad 3\lambda + 2\mu > 0 \tag{5}$$

dalle quali poi segue:

$$\lambda + \mu > 0.$$

Così, ad esempio, per l'alluminio, la cui densità è 2,68, si ha in grammi e per cm^2,

$$\lambda = 302, \ \mu = 249;$$

per il ferro, la cui densità è 7,19, si ha:

$$\lambda = 450, \ \mu = 495;$$

e pel nichel, di densità 8,80:

$$\lambda = 1160, \ \mu = 750.$$

In questi valori di λ e μ, come al solito, si è trascurato il fattore 10^6. *

§ 3. Relazioni tra pressioni e deformazione nei corpi isotropi. — Ragioni di simmetria conducono a ritenere che in ogni punto di un corpo isotropo le rette principali di deformazione coincidano con quelle delle pressioni principali. Ma senza ammettere nulla, noi definiremo in altra maniera un corpo isotropo; diremo cioè *isotropo un corpo*

* Per più ampii risultati, variabili del resto secondo gli sperimentatori, vedi l'art. di Kelvin: *Elasticity* in Ency. Brit. 1876, oppure: Math. a. Phys. Pap. 3. p. 31 e seg.

in ogni punto del quale le direzioni delle pressioni e delle dilatazioni principali sono identiche ed elasticamente permutabili.

Mostreremo (Cap. 5°, § 4) l'identità di questa definizione con quella già data al § 2.

In un corpo siffatto siano dunque ξ, η, ζ le direzioni principali; x, y, z un'altra terna qualunque ortogonale uscente da M; siano a_0, b_0, c_0 le dilatazioni principali (componenti di deformazione relative alla prima terna); a, b, $c \ldots h$ le componenti di deformazione relative alla seconda. Detti α_1, β_1, γ_1, i coseni direttori dell'asse x; α_2, β_2, γ_2, quelli di y, ecc., rispetto ξ, η, ζ, le formule di trasformazione stabilite al § 7, ci danno subito

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 \alpha_1^2 + b_0 \beta_1^2 + c_0 \gamma_1^2, \text{ ecc.} \\ f &= 2(a_0 \alpha_2 \alpha_3 + b_0 \beta_2 \beta_3 + c_0 \gamma_2 \gamma_3), \text{ ecc.} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Le componenti speciali di pressione relative a ξ, η, ζ sono le componenti principali P_1, P_2, P_3; quelle relative a x, y, z sono le $X_x, \ldots Y_x$.

Consideriamo un elemento piano secondo yz; la pressione che si esercita su questo, in virtù delle formule di Cauchy, ha per componenti secondo ξ, η, ζ le,

$$P_1 \alpha_1, \; P_2 \beta_1, \; P_3 \gamma_1.$$

Quindi la componente secondo x, cioè X_x è espressa da:

$$X_x = P_1 \alpha_1^2 + P_2 \beta_1^2 + P_3 \gamma_1^2. \quad (7)$$

e parimenti:

$$Y_z = P_1 \alpha_2 \alpha_3 + P_2 \beta_2 \beta_3 + P_3 \gamma_2 \gamma_3, \text{ ecc.} \quad (8)$$

Ora noi esprimeremo le a_0, b_0, c_0 linearmente ed omogeneamente per P_1, P_2, P_3; e allora risulteranno anche le a, b, $c \ldots h$ lineari ed omogenee nelle $X_x, \ldots Y_x$.

Ritagliamo nel corpo (intorno ad M) un parallelepipedo cogli spigoli diretti secondo ξ, η, ζ; sulla faccia $M\,B\,C$, normale a ξ, e sulla sua opposta, si eserciti la pressione P_1 per unità d'area in modo uniforme. Lo spigolo $M\,A$ si accorcia; il suo coefficiente di dilatazione è $-P_1 : E$; gli altri due spigoli $M\,B$, $M\,C$, elasticamente permutabili, si dilatano ed il loro coefficiente di dilatazione è $\varkappa\, P_1 : E$. Per effetto delle P_2 e P_3, distribuite come P_1 sulle altre facce del parallelepipedo, l'asse ξ si dilaterà ed il suo coefficiente di dilatazione è rispettivamente $\varkappa\, P_2 : E$ e $\varkappa\, P_3 : E$. E poichè in totale esso è espresso da a_0, così avremo:

$$a_0 = \frac{1}{E}\left\{\varkappa\,(P_2 + P_3) - P_1\right\}$$

Poniamo:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = X_x + Y_y + Z_z\,; \quad (9)$$

P è l'invariante lineare di pressione. Risulterà:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{\varkappa\, P - (1+\varkappa)\, P_1}{E} \\ b_0 &= \frac{\varkappa\, P - (1+\varkappa)\, P_2}{E} \\ c_0 &= \frac{\varkappa\, P - (1+\varkappa)\, P_3}{E}\,. \end{aligned}\right\} (10)$$

La dilatazione cubica Θ (invariante lineare di deformazione) è espressa dalla somma di a_0, b_0, c_0: onde:

$$\Theta = -\frac{P(1-2\varkappa)}{E}. \tag{11}$$

Sostituendo poscia i valori di a_0, b_0, c_0, rispettivamente nelle (6) e tenendo presenti le (7) e (8) risulta:

$$a = \frac{\varkappa P - (1+\varkappa) X_x}{E}; \text{ecc...}; f = -\frac{2(1+\varkappa) Y_z}{E}; \text{ecc.},$$

e ricavando di qui inversamente le $X_x, \ldots$ otteniamo:

$$\left.\begin{array}{c} -X_x = \lambda\Theta + 2\mu a; \quad -Y_y = \lambda\Theta + 2\mu b; \\ -Z_z = \lambda\Theta + 2\mu c \\ -Y_z = \mu f; \quad -Z_x = \mu g; \quad -X_y = \mu h \end{array}\right\} \tag{12}$$

che danno *le componenti speciali di pressione espresse linearmente ed omogeneamente per le componenti di deformazione.*

Se $P_1 = P_2 = P_3$, cioè se il parallelepipedo è sottoposto ad una pressione uniforme, l'esperienza mostra che esso subisce una compressione, per cui Θ deve risultare negativo. Quindi:

$$1 - 2\varkappa > 0.$$

Inoltre ad una pressione tangenziale (p. e. $Y_z < 0$) corrisponde un vero decremento dell'angolo di due

rette (quindi f è positivo) dunque:

$$1 + \varkappa > 0.$$

Resta quindi giustificata la disuguaglianza (2). Il rapporto di Θ alla pressione uniforme cioè

$$\frac{3(1-2\varkappa)}{E} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}$$

dicesi: *coefficiente di compressibilità cubica.*

§ **4. Potenziale di elasticità.** — Dimostreremo nel Cap. seguente che il lavoro di deformazione compiuto dalle forze interne, in uno spostamento infinitesimo del corpo che occupa uno spazio S, è dato da:

$$\delta L = \int (X_x \delta a + \ldots + Y_z \delta f + \ldots) d S.$$

Posto:

$$\left.\begin{aligned} 2\Pi &= \lambda \Theta^2 + \\ &+ 2\mu \left(a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2} g^2 + \frac{1}{2} h^2\right), \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

in virtù delle (12) risulta:

$$X_x \delta a + \ldots + Y_z \delta f + \ldots = -\delta \Pi;$$

dunque:

$$\delta L = -\int \delta \Pi \, d S = -\delta \int \Pi \, d S,$$

essendo S invariabile. Il lavoro compiuto dalle forze esterne è quindi espresso da:

$$\delta \int \Pi \, d S.$$

Esiste dunque pei corpi isotropi una funzione dipendente dallo stato attuale della deformazione e tale che il suo decremento esprime il lavoro elementare compiuto dalle forze interne, e il suo incremento esprime il lavoro delle forze esterne.

Questa funzione:

$$\int \Pi \, d\, S$$

dicesi *potenziale di elasticità*. Il limite a cui tende il suo rapporto al volume S coll'impiccolire indefinitamente di S, cioè Π, dicesi *potenziale specifico unitario relativo ad un dato punto*, o, semplicemente, *potenziale*.

La (13) può scriversi ancora:

$$\left.\begin{aligned} 2\,\Pi = (\lambda + 2\,\mu)\,\Theta^2 + \\ + \mu(f^2 - 4\,b\,c + g^2 - 4\,c\,a + h^2 - 4\,a\,b). \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Valendosi invece delle espressioni delle $a, \ldots$ mediante le $X_x \ldots$ si ha:

$$X_x\,\delta a + \ldots + Y_z\,\delta f + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\,\delta\left\{\frac{\varkappa}{E}\,P^2 - \frac{1+\varkappa}{E}\left(X_x^2 + \ldots + 2\,Y_z^2 + \ldots\right)\right\}$$

e quindi:

$$2\,\Pi = -\frac{\varkappa}{E}\,P^2 + \frac{1+\varkappa}{E}\left(X_x^2 + \ldots + 2\,Y_z^2 + \ldots\right) \quad (15)$$

dunque: *il potenziale è una combinazione lineare del quadrato dell' invariante lineare e dell'invariante quadratico di deformazione (o di pressione) e però anche esso è* (come doveva essere pel suo stesso significato fisico) *un invariante.*

Il potenziale è una funzione quadratica omogenea delle componenti di deformazione e di pressione. È poi facilmente da scorgersi in determinati modi per deformare il corpo: esso è positivo [illegible] (da [illegible] per [illegible] e quindi $\int \Pi \, dS > 0$) [illegible] quando non si [illegible] $\varepsilon = \gamma = \ldots = \varepsilon = 0$.

[illegible]

[illegible] e di [illegible] risulta:

$$\Pi_1 = -\frac{\Pi}{I} \ldots \quad \Pi_2 = -\frac{\Pi}{I^2} \ldots \quad \Pi_3 = -\frac{\Pi}{I^3} \ldots \quad \Pi_4 = -\frac{\Pi}{I^4} \ldots \tag{16}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\ldots = \ldots \tag{61}$$

[illegible]

Occorre che:

$$\frac{\lambda}{2\mu} = 3\alpha^2 - 2\alpha$$

onde:

$$3\alpha = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{3\lambda}{2\mu}}.$$

Quindi:

$$\Pi = \mu \left\{(a - \alpha\Theta)^2 + \ldots + \frac{1}{2} f^2 \ldots\right\},$$

e questa deve essere positiva per qualunque valore di a, b, ... h; in particolare dunque per:

$$a = b = c = 0,$$

e ciò esige che

$$\mu > 0;$$

e per $a = b = c$ ed $f = g = h = 0$; ciò esige che

$$3\mu(1 - 3\alpha)^2 = 3\mu\left(1 + \frac{3\lambda}{2\mu}\right) > 0$$

cioè:

$$3\lambda + 2\mu > 0$$

che sono precisamente le (5). Ammesse reciprocamente le (5), α risulta reale e quindi Π essendo il prodotto di un numero positivo per una somma di quadrati di quantità reali è essenzialmente positivo.

§ 5. Equazioni dell'equilibrio. — Si possono agevolmente dedurre dalle equazioni generali (21), p. 149, del Cap. precedente, sostituendo alle X_x, ... le loro espressioni (12) in funzione delle componenti

di deformazione. Si ha anzitutto:

$$\rho X + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial a}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

oppure, sostituendo i valori delle $a, b, c \ldots h$ in funzione delle componenti di spostamento:

$$\rho X + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

$$+ \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0$$

cioè:

$$\left.\begin{aligned} &\rho X + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta_2 u = 0 \\ &\rho Y + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta_2 v = 0 \\ &\rho Z + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta_2 w = 0 \\ &\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

che sono una prima forma delle equazioni indefinite dell'equilibrio elastico. In esse figurano Θ e gli spostamenti e sono equazioni alle derivate parziali del secondo ordine lineari.

Si possono porre sotto altra forma. Diciamo T_1, T_2, T_3 i doppi delle componenti della rota-

zione della particella; cioè poniamo:

$$T_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \; T_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \; T_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

(formule 10 del Cap. precedente) e teniamo presente che:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial T_3}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \Delta_2 u, \text{ ecc.}$$

Sarà facile trasformare le (17) nelle:

$$\left.\begin{aligned} \rho X + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{\partial T_3}{\partial y}\right) = 0 \\ \rho Y + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial T_3}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial z}\right) = 0 \\ \rho Z + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial x}\right) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

nelle quali figurano le rotazioni e la dilatazione cubica.

Le equazioni del teorema di Cauchy ci forniranno poscia le equazioni ai limiti. Diciamo infatti L, M, N le componenti (per unità d'area) delle trazioni che si esercitano in superficie. Sarà anzitutto

$$L = X_x \frac{dx}{dn} + X_y \frac{dy}{dn} + X_z \frac{dz}{dn}$$

dove il secondo membro è calcolato per la superficie del corpo.

Sostituendo ad $X_x, \ldots$ i valori (12) si ha:

$$0 = L + \lambda \Theta \frac{dx}{dn} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn} +$$

$$+ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{dy}{dn} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{dz}{dn}$$

e questa può essere scritta così:

$$0 = L + \lambda\Theta \frac{dx}{dn} + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dn}\right) +$$

$$+ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{dy}{dn} + \mu\left(-\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{dz}{dn};$$

cioè:

$$\left.\begin{aligned} L + \lambda\Theta\frac{dx}{dn} + 2\mu\frac{du}{dn} + \mu\left(T_3\frac{dy}{dn} - T_2\frac{dz}{dn}\right) &= 0 \\ M + \lambda\Theta\frac{dy}{dn} + 2\mu\frac{dv}{dn} + \mu\left(T_1\frac{dz}{dn} - T_3\frac{dx}{dn}\right) &= 0 \\ N + \lambda\Theta\frac{dz}{dn} + 2\mu\frac{dw}{dn} + \mu\left(T_2\frac{dx}{dn} - T_1\frac{dy}{dn}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Quella stessa equazione può anche scriversi così:

$$0 = L + \lambda\Theta\frac{dx}{dn} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dn}\right) +$$

$$+ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dz}{dn}\right);$$

aggiungiamo e togliamo il trinomio:

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dx}{dn}\right)=\mu\Theta\frac{dx}{dn}$$

ed otterremo:

$$\left.\begin{aligned}
&0=L+(\lambda+\mu)\Theta\frac{dx}{dn}+\mu\frac{du}{dn}+\\
&+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dx}{dn}\right)+\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dz}{dn}-\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dx}{dn}\right)\\
&0=M+(\lambda+\mu)\Theta\frac{dy}{dn}+\mu\frac{dv}{dn}+\\
&+\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dz}{dn}-\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dy}{dn}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{dn}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{dn}\right)\\
&0=N+(\lambda+\mu)\Theta\frac{dz}{dn}+\mu\frac{dw}{dn}+\\
&+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dx}{dn}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dz}{dn}\right)+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

In queste equazioni i valori di Θ, u, v, w, $\frac{du}{dn}$, ecc. sono da riferirsi alla superficie limite del corpo *.

---

* Le equazioni (17),... (20), furono dedotte coll'ipotesi molecolare (vedi Cap. seguente) e quindi per $\varkappa=\frac{1}{4}$: da Navier nel 1821 *Mem. Ac. d. Sciences,* **7**; 1827); da Lamé (mem. citata a pag. 136) con procedimento diretto ma non rigoroso e da Poisson (*Mem. Ac. d. Sciences*, **8**; 1828) che deduce anzitutto le (12); infine da Cauchy, senza nessuna ipotesi molecolare, ammettendo la proprietà del § 3, da noi assunta come definizione, e poi le espressioni delle P mediante a_0... (*Anc. Exerc.* 1828; *Oeuvres Comp.* **8** (2), p. 204).

In alcuni recenti lavori sulla teoria dell'elasticità (in ispecie in quelli del prof. Cerruti) invece delle due costanti di Lamé λ, μ sono introdotte altre due costanti Ω, ω che hanno un importante significato fisico. Esse sono definite dalle:

$$\Omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \omega^2 = \frac{\mu}{\rho}. \tag{21}$$

In virtù delle (5) queste due costanti sono reali e inoltre:

$$\Omega^2 > \omega^2; \quad 3\,\Omega^2 - 2\,\omega^2 > 0.$$

Si dimostra poi che in un corpo isotropo si possono propagare due sorta di onde piane; le une hanno una velocità Ω e ad esse corrisponde una dilatazione senza rotazione (onde longitudinali): le altre si propagano con velocità ω cui corrisponde una rotazione senza dilatazione (onde trasversali) *. Con queste due nuove costanti le (17) assumono la forma:

$$X + (\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \omega^2\,\Delta_2\,u = 0, \text{ ecc.}; \tag{22}$$

mentre le equazioni ai limiti diventano

$$\frac{1}{\rho}\,L + (\Omega^2 - 2\,\omega^2)\,\Theta\,\frac{d\,x}{d\,n} +$$

$$+ 2\,\omega^2\,\frac{d\,u}{d\,n} + \omega^2\left(T_3\,\frac{d\,y}{d\,n} - T_2\,\frac{d\,z}{d\,n}\right) = 0, \text{ ecc.} \ldots \tag{23}$$

* Vedi, in particolare, LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Paris, 1852, 11me Leçon.

Derivando le equazioni (17) rispetto x, y, z e poi sommando, si ha

$$\rho\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)+(\lambda+2\mu)\Delta_2\Theta=0. \quad (24)$$

Derivando invece la terza rispetto y; la seconda rispetto z e sottraendo, otteniamo

$$\rho\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+\mu\,\Delta_2\,T_1=0, \text{ ecc.}$$

Nel caso in cui *il corpo non è soggetto a forze di massa* (che per quanto vedremo nel Cap. 6° è specialmente notevole) si ha

$$\Delta_2\Theta=\Delta_2\,T_1=\ldots=0$$

cioè *le funzioni* Θ, $T_1, \ldots$ *sono armoniche.* Ma dalla prima delle (17) segue pure

$$(\lambda+\mu)\,\Delta_2\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\,\Delta_4\,u=0,$$

quindi

$$\Delta_4\,u=\Delta_4\,v=\Delta_4\,w=0$$

cioè *le funzioni* u, v, w, *cioè le componenti di spostamento, sono biarmoniche.*

Se $\mu=0$ le (17) e (19) assumono la forma delle equazioni dell'equilibrio di una massa fluida; cioè di un corpo la cui rigidità è nulla. Il coefficiente μ sta a rappresentare la rigidità del corpo: di qui il nome di *modulo di rigidità* dato a μ.

Considereremo, in un prossimo capitolo, più davvicino le equazioni trovate e mostreremo come esse siano ancora *sufficienti* per l'equilibrio di un corpo elastico isotropo.

Dalle equazioni di equilibrio poi, col principio di d'Alembert, si passa agevolmente a quelle del moto. Infatti le componenti dell'accelerazione di una particella (riferite all'unità di massa) sono

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

onde le equazioni del moto sono:

$$X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \omega^2 \Delta_2 u = 0, \text{ ecc.}$$

Ma come già fu detto, escluderemo dalle nostre considerazioni le questioni relative al moto dei corpi elastici.*

---

* Su questo capitolo cfr. il libro già citato del prof. Cesàro, § IV e Maggi, *Principii della teoria matem. del mov. dei corpi.* Milano, 1896, pag. 428.

CAPITOLO QUINTO.

LE EQUAZIONI DELL'ELASTICITÀ PER I CORPI ANISOTROPI.

§ 1. La teoria molecolare. — Abbiamo già detto che i cristalli sono anisotropi. Infatti già gli antichi esperimenti di Savart (1821) avevano messo in evidenza che per rispetto *all'elasticità i cristalli si distinguono in modo sensibilissimo dai corpi isotropi.*

Eccitando infatti una piastra circolare ritagliata in un cristallo di rocca parallelamente all'asse ottico, essa presenta figure nodali diverse secondo che viene eccitata in punti diversi del contorno.

Anche i fenomeni della doppia rifrazione dei cristalli ci assicurano della loro natura non isotropa. Dobbiamo dunque costruire una nuova teoria per questi corpi *.

---

* In alcuni § di questo capitolo abbiamo seguito quasi testualmente la bella comunicazione del prof. Voigt: *L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux.* Rapports presentés au Congrès International de Physique. Paris. 1900, 1er Volume.

Come la capillarità, teoria dell'attrazione, e le vecchie teorie elettriche, anche l'elasticità fu in origine fondata da Navier sulla teoria molecolare o delle azioni a distanza.

In questa teoria i corpi si suppongono costituiti da masse elementari distinte, cioè di tante *molecole soggette ad azioni mutue dirette secondo le congiungenti i centri delle molecole e variabili con una legge qualunque funzione della sola distanza, trascurabili per distanze superiori ad un certo limite (raggio della sfera di attività molecolare).*

In un cristallo omogeneo o in un corpo isotropo non deformato, si ammette che le molecole siano identiche, orientate allo stesso modo e distribuite regolarmente in modo che ogni molecola sia circondata dalle altre allo stesso modo.

Le distanze alle quali si esercitano queste azioni mutue sono considerate come grandissime rispetto alla distanza delle molecole vicine e le deformazioni sono considerate variabili con una lentezza tale che, anche nel corpo deformato, la ripartizione delle molecole possa ritenersi come regolare entro la sfera di attività molecolare.

Questa teoria fa dipendere le proprietà elastiche dei corpi isotropi da un solo coefficiente.

Infatti sia O una molecola: M una delle circonvicine di coordinate relative (cioè rispetto O) ξ, η, ζ. La forza che si esercita da M verso O sia espressa da

$$\varphi(\rho)\,\delta\rho,$$

essendo $\delta\rho$ la variazione subita da $\rho = 0$ M per effetto della deformazione. Le sue componenti

sono:

$$\frac{\xi}{\rho}\varphi(\rho)\,\delta\rho\,,\quad \frac{\eta}{\rho}\varphi(\rho)\,\delta\rho\,,\quad \frac{\zeta}{\rho}\varphi(\rho)\,\delta\rho\,.$$

Consideriamo la risultante delle azioni di tutte le molecole che cadono entro la sfera di attività molecolare di O. Essa ha per componenti

$$\sum\frac{\xi}{\rho}\varphi(\rho)\,\delta\rho,\ \text{ecc.}$$

in cui la somma può essere estesa anche a tutto il corpo. Se diciamo X, Y, Z le componenti delle forze esterne, riferite all'unità di massa; k la densità, avremo intanto le seguenti equazioni indefinite per l'equilibrio

$$k\,X+\sum\frac{\xi}{\rho}\varphi(\rho)\,\delta\rho=0\,,\ \text{ecc.}$$

Ma:

$$\rho^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$$

$$\rho\,\delta\rho=\xi\,\delta\xi+\eta\,\delta\eta+\zeta\,\delta\zeta\,;$$

quindi possiamo anche scrivere

$$k\,X+\sum\varphi_1(\rho)\,\{\xi^2\,\delta\xi+\xi\,\eta\,\delta\eta+\xi\,\zeta\,\delta\zeta\}=0,\ \text{ecc.};$$

in cui

$$\varphi(\rho)=\rho^2\,\varphi_1(\rho).$$

Se le coordinate assolute di O sono x, y, z, quelle di M saranno $x+\xi$, ecc.; dette u, v, w le componenti di spostamento di O avremo (vedi Cap. 3°, § 2)

$$\delta\xi=u(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)-u(x,\ y,\ z),$$

cioè

$$\delta \xi = \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \zeta +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \xi^2 + \ldots + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z} \eta \zeta + \ldots \right) + \ldots \text{ ecc.}$$

Supponiamo che in ogni molecola del corpo esistano tre piani di simmetria (piani coordinati); mutando quindi ξ in $-\xi$, oppure η in $-\eta$, ζ in $-\zeta$ nulla deve mutare nelle equazioni di equilibrio, dalle quali, perciò, devono scomparire i termini contenenti le potenze dispari di ξ, η, ζ. Risulta dunque

$$k X + \sum \frac{1}{2} \varphi_1 (\rho) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \xi^4 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \eta^2 \xi^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \zeta^2 \xi^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial y} \xi^2 \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial z} \xi^2 \zeta^2 \right\} = 0$$

e due equazioni analoghe. In queste compariscono i sei seguenti coefficienti, poichè le derivate delle u, v, w essendo da riferirsi al punto O sono indipendenti dalla sommatoria:

$$\sum \varphi_1 (\rho) \xi^4, \quad \sum \varphi_1 (\rho) \eta^4, \quad \sum \varphi_1 (\rho) \zeta^4,$$

$$\sum \varphi_1 (\rho) \eta^2 \zeta^2, \quad \sum \varphi_1 (\rho) \zeta^2 \xi^2, \quad \sum \varphi_1 (\rho) \xi^2 \eta^2.$$

Supponiamo ancora che i tre piani di simmetria siano tra loro elasticamente permutabili: allora i primi coefficienti sono eguali tra loro, come pure i secondi. Sia $2 H$ il valore comune dei primi; 2μ quello dei secondi. Nel caso poi della isotropia

tutti i piani condotti per O sono di simmetria e scegliendo quindi un'altra terna di assi ortogonali per O, questi coefficienti non debbono variare; e poichè per le note formule di trasformazione ξ si muta in $\alpha\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1$; ecc. così dovremo avere

$$2H = \sum(\alpha\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1)^4 \varphi_1(\rho);$$

sviluppando e osservando che i termini a potenze dispari sono già nulli, abbiamo

$$2H = 2H(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) + 12\mu(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2);$$

ma

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2(\beta^2\gamma^2 + \ldots)$$

onde

$$(3\mu - H)(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2) = 0$$

quindi

$$H = 3\mu$$

e le equazioni dell'equilibrio diventano

$$kX + 2\mu\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \mu\Delta_2 u = 0, \text{ ecc.};$$

le quali coincidono con le (17) del Cap. prec. purchè si ponga in queste $\lambda = \mu$; ma allora dalle (4) dello stesso capitolo risulta

$$\varkappa = \frac{1}{4}.$$

Ciò, come si è detto, non è pienamente confermato dall'esperienza. Maggiori difficoltà trovò la teoria molecolare nelle equazioni di equilibrio dei cristalli.

Riprendiamo l'analisi precedente nell'ipotesi di un corpo qualunque. Sostituendo nelle equazioni di equilibrio i valori delle $\delta\xi, \ldots$ e supponendo nulle le pressioni nello stato iniziale, dalla sommatoria spariranno i termini contenenti le derivate prime delle $u, \ldots$; e le equazioni stesse si possono porre sotto la forma (21) del Cap. 3°, dove

$$-X_x = c_{11}\,a + c_{12}\,b + \ldots + c_{16}\,h, \text{ ecc.}$$

ed inoltre

$$c_{11} = \frac{1}{2}\sum \varphi_1(\rho)\,\xi^4, \text{ ecc.}; \quad c_{44} = \sum \varphi_1(\rho)\,\eta^2\zeta^2$$

$$c_{23} = c_{32} = \sum \varphi_1(\rho)\,\eta^2\zeta^2, \text{ ecc.};$$

$$c_{14} = c_{41} = \sum \varphi_1(\rho)\,\xi^2\eta\zeta, \text{ ecc.};$$

$$c_{56} = c_{65} = \sum \varphi_1(\rho)\,\xi^2\eta\zeta, \text{ ecc.};$$

sicchè tra i 21 coefficienti $c_{rs} = c_{sr}$ dovrebbero verificarsi le seguenti relazioni, dette di Cauchy e Poisson.

$$\left.\begin{array}{lll} c_{44} = c_{23}, & c_{55} = c_{31}, & c_{66} = c_{12} \\ c_{56} = c_{14}, & c_{64} = c_{25}, & c_{45} = c_{36}. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ora queste si sono trovate in completo disac-

cordo colle esperienze del prof. Voigt e delle quali parleremo più innanzi *.

§ 2. Teoria delle azioni immediate. Potenziale di elasticità. — È stata adottata un'altra teoria la quale, applicando un procedimento già seguito in varie teorie di fisica matematica, deduce le leggi della elasticità dal concetto di potenziale e dai principii della termodinamica. Tale teoria è pienamente confermata dall'esperienza.

La prima idea di potenziale di elasticità è dovuta a Green, il quale ne ammise senz'altro l'esistenza e sviluppò alcune delle numerose conseguenze. Lord Kelvin ne ha pel primo dimostrata l'esistenza nella ipotesi che il corpo sia deformato a temperatura costante, oppure in modo che in fine non vi sia nè acquisto, nè perdita di calore **.

---

* Questo procedimento diretto, generalizzazione di quello di Navier, e che non presuppone nè l'analisi delle pressioni, nè quella della deformazione, è dovuto a Cauchy (1828): *Oeuv. Comp.* **8** (**2**); p. 227, che però non dà esplicitamente le (1) e non suppone nulle le pressioni nello stato iniziale. In un'altra memoria (ibidem. p. 253) lo stesso metodo è applicato al calcolo diretto delle pressioni. Si veda pure la memoria postuma di Poisson: *Mem. sur l'équil. et le mouv. d. corps cristallisés*, Mem. d l'Ac. d. Sciences **18**; 1842 e Mathieu: *Théorie de l'élasticité*, ecc., 1900, p. 43.

** Green (1837): *On the laws of Refl. a. Refract. of Light.* Mathematical and Physical Papers.

Lord Kelvin (1855) e (1863) ha dimostrata l'esistenza del potenziale elastico allorchè le deformazioni sono omogenee e la temperatura, oppure l'entropia del corpo, è costante, senza fare nessuna ipotesi sulla grandezza della deformazione. *Math. a. Phys. Papers.* **1**. p. 291; **3**, p. 386.

Vedi la monografia citata del sig. Cosserat, Cap. 3°, e in generale per la termodinamica dei corpi elastici: Voigt: *Thermodynamik*. Leipzig, 1903. Kap. IV, Absch. III.

Consideriamo il corpo nel suo stato naturale e deformiamolo facendo agire lentamente le forze deformatrici, onde evitare vibrazioni e supponiamo che in tutte le fasi della deformazione la temperatura resti costante. Dopo che il corpo sarà deformato ed equilibrato, facciamolo ripassare per le stesse fasi in senso inverso o per altre fasi qualunque in modo da ricondurlo allo stato primitivo. Il lavoro compiuto dalle forze esterne nella prima o nella seconda serie deve essere nullo non essendovi nè perdita nè guadagno di lavoro. Due siffatte modificazioni diconsi *isotermiche invertibili.* In una qualunque di queste fasi sia δl il lavoro elementare delle forze esterne; δL quello delle forze interne; in ogni fase di deformazione avendosi equilibrio, è

$$\delta l + \delta L = 0,$$

e facendo quindi la somma di tutti i lavori compiuti in ogni fase, alla fine avremo

$$\sum \delta l + \sum \delta L = 0.$$

Ma si è detto che

$$\sum \delta l = 0,$$

onde sarà

$$\sum \delta L = 0.$$

Di qui si può dedurre subito che in due serie di modificazioni isotermiche invertibili che conducono il sistema da uno stato A ad un altro A', il lavoro compiuto è sempre lo stesso e non dipende che dai due stati; cioè:

il lavoro isotermico invertibile tra due stati è un invariante.

Infatti si passi da A in A' con un sistema S di modificazioni invertibili compiendo un lavoro T; mentre nello stesso passaggio, ma con un altro sistema S' di modificazioni, si compia un lavoro T'. Ma allora da A' in A col sistema inverso di S' si compie il lavoro $-T'$, il sistema essendo invertibile. E quindi se da A torniamo nuovamente in A col sistema S e coll'inverso di S' il lavoro compiuto sarà $T - T'$ che è nullo pel 1.° principio di Carnot.

Ora si potrebbe dimostrare che:

il lavoro isotermico invertibile è la differenza dei valori che prende una funzione (potenziale interno) per lo stato iniziale e finale.*

Possiamo effettuare direttamente la ricerca di questo potenziale.

Per ciò osserviamo che il lavoro compiuto dalle forze esterne (forze di massa e pressioni o trazioni in superficie) è espresso da

$$\delta l = \int \rho (X \delta u + \ldots) d S + \int (X_n \delta u + \ldots) d \sigma$$

nel passaggio da $x + u, \ldots,$ a $x + u + \delta u, \ldots$

In virtù delle formule di Cauchy e del lemma di Gauss abbiamo:

$$\int (X_n \delta u + \ldots) d \sigma =$$
$$= \int \{(X_x \delta u + Y_x \delta v + Z_x \delta w) \cos (n, x) + \ldots\} d \sigma$$
$$= - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (X_x \delta u + Y_x \delta v + Z_x \delta w) + \ldots \right\} d S.$$

* Robin: *Oeuvr. scient. Thermodynamique générale.* Paris, 1901, p. 57.

In quest'ultimo integrale, eseguite le derivazioni entro parentesi, il cofficiente di δu risulta

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = \rho X; \text{ ecc....}$$

Il coefficiente di X_x è

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x} = \delta \frac{\partial u}{\partial x} = \delta a; \text{ ecc.... ;}$$

quello di Y_z è

$$\frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial z} = \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \delta f; \text{ ecc....}$$

onde

$$\delta L = -\delta l = \int (X_x \delta a + Y_y \delta b + Z_z \delta c + \\ + Y_z \delta f + Z_x \delta g + X_y \delta h)\, d S.$$

L'integrazione va estesa al volume S del corpo.

A definire le componenti di deformazione $a, b, \ldots, h$ corrispondenti alle varie fasi della deformazione (le quali componenti cominciando ad assumere valori nulli, alla fine della prima serie assumono i valori a, b, $c \ldots h$ (possiamo supporre che le a, $b, \ldots h$ siano funzioni di un certo parametro t variabile da zero a t in una serie di modificazioni.

Avremo quindi

$$\sum \delta L = \int d S \int (X_x \delta a + \ldots + Y_z \delta f \ldots)$$

e per quanto fu detto risulta che

$$\int_0^t (X_x \delta a + \ldots + Y_z \delta f + \ldots)$$

non deve dipendere dal cammino d'integrazione; perciò è necessario e basta (vedi la nota in fine del capitolo) che sia

$$X_x \delta a + \ldots + Y_z \delta f + \ldots = -\delta \Pi \qquad (2)$$

cioè sia la variazione esatta di una funzione delle sole $a, b, \ldots h$.

Si ha dunque

$$\delta L = -\int \delta \Pi \, d S = -\delta \int \Pi \, d S. \qquad (3)$$

In conseguenza
esiste una funzione

$$\int \Pi \, d S$$

determinata dallo stato attuale del corpo, il cui decremento esprime il lavoro compiuto dalle forze interne e il cui incremento esprime quindi il lavoro compiuto dalle forze esterne.

La funzione Π, che è il limite a cui converge il rapporto $\int \Pi d S : S$ collo impiccolire indefinitamente di S dicesi *potenziale isotermico unitario o potenziale specifico unitario relativo ad un dato punto del corpo, o semplicemente potenziale.*

Poichè è

$$\int \Pi \, d S > 0$$

qualunque sia S, è chiaro che $\Pi > 0$.

§ 3. Proprietà del potenziale di elasticità. —

1.ª *Il potenziale si annulla solamente se sono nulle le componenti di deformazione.* Infatti solo in tal caso è nullo il lavoro di deformazione delle forze interne.

2.ª *Le componenti speciali di pressione sono le derivate negative del potenziale rispetto alle componenti di deformazione.*

Ciò risulta dalla (2) e si ha quindi:

$$X_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial a}; \ldots; \quad Y_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial f}; \ldots \qquad (4)$$

3.ª *Il potenziale è una funzione quadratica omogenea, definita e positiva delle componenti di deformazione.*

Infatti le X_x ... sono funzioni lineari ed omogenee delle $a, \ldots h$, quindi Π deve essere funzione quadratica delle stesse; nè può contenere termini a primo grado che darebbero termini costanti nelle $X_x \ldots$; e dovendo infine annullarsi per

$$a = b = \ldots = h = 0$$

non potrà nemmeno contenere termine costante.

4.ª *Il potenziale è pure una funzione quadratica ed omogenea delle componenti speciali di pressione.*

Per una nota proprietà delle forme quadratiche definite il determinante del sistema (4), che è poi il discriminante di Π, è diverso da zero.

Chè se fosse, zero si potrebbe soddisfare al sistema

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial h} = 0$$

con valori non tutti nulli per $a, b, \ldots h$ e quindi anche a

$$2\,\Pi = a\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \ldots = 0,$$

ciò che non è in virtù della 1.ª È dunque possibile risolvere il sistema (4) rispetto alle componenti di deformazione, che risulteranno espresse mediante funzioni lineari ed omogenee delle $X_x \ldots$ e quindi sarà effettivamente Π una funzione quadratica ed omogenea delle componenti di pressione. La Π così considerata è dunque la *forma reciproca* della prima.

5.ª *Le componenti di deformazione sono le derivate negative del potenziale rispetto alle componenti di pressione.*

Ciò risulta del pari da note proprietà delle forme quadratiche; e del resto si può dimostrare direttamente. Abbiamo

$$2\,\Pi = -\sum (X_x\, a + Y_z\, f)$$

quindi

$$2\, d\,\Pi = -\sum (X_x\, d\, a + a\, d\, X_x + Y_z\, d\, f + f\, d\, Y_z).$$

Ma abbiamo ancora

$$d\,\Pi = \sum \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a}\, d\, a + \frac{\partial \Pi}{\partial f}\, d\, f\right) = -\sum X_x\, d\, a - \sum Y_z\, d\, f,$$

e sottraendo dalla precedente otteniamo:

$$d\,\Pi = -\sum (a\,d\,X_x + f\,d\,Y_z)$$

dalla quale

$$a = -\frac{\partial \Pi}{\partial X_x}\,;\ldots,\ f = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y_z},\ldots^{*}. \qquad (5)$$

§ **4. Coefficienti e moduli di elasticità.** — L'espressione generale di Π (quadratica ed omogenea a sei variabili) contiene 21 coefficienti di-

* È da osservare che avendosi una corrispondenza univoca fra forze e spostamenti relativi, potrà considerarsi il potenziale come funzione degli spostamenti. In tale ipotesi sussiste il *teorema* del CASTIGLIANO: *le derivate del lavoro di deformazione, espresso per gli spostamenti* (*o per le forze esterne*), *rispetto agli spostamenti* (*o rispetto alle forze*), *sono uguali alle forze* (*o agli spostamenti*). Su questa questione, come sul teorema del minimo lavoro del Menabrea, vedi: CERRUTI, *Atti R. Acc. Lincei*, **2**; 1875 e le seguenti note del prof. L. DONATI, *Sul lavoro di deformazione dei sistemi elastici*. Mem. Acc. Bologna, **9**; 1888. — *Illustrazione del teorema del Menabrea*, ibidem, **10**; 1889. — *Ulteriori osserv. intorno al teorema del Menabrea*, ibidem, **4**; 1894. Inoltre cfr. *Introduzione teorica al Corso di Fisica Tecnica*. Bologna, 1901. Corso litogr. Vedi ancora SIACCI, *Sulle tensioni in un sistema elastico articolato*. Rend. Acc. Lincei, 1894, pag. 205 e 245.

È da notare ancora che l'ipotesi delle pressioni nulle nello stato naturale potrebbe non esser verificata: e in virtù della connessione delle diverse parti del sistema queste si trovino in uno stato di mutua pressione. Converrà allora considerare le deformazioni e le pressioni nello stato iniziale (naturale) e le differenze coi valori omonomi corrispondenti ad un altro stato. Vedi in particolare la prima delle suddette note del prof. Donati, l'opera già citata del Maggi e quella del Poincaré, pag. 29.

stinti. Sarà quindi

$$2\,\Pi = c_{11}\,a^2 + c_{22}\,b^2 + \ldots + c_{66}\,h^2 + 2\,c_{12}\,a\,b + \ldots \quad (6)$$

oppure

$$2\,\Pi = s_{11}\,X^2_x + \ldots + s_{66}\,X^2_y + 2\,s_{12}\,X_x\,Y_y + \ldots$$

e quindi

$$-X_x = c_{11}\,a + c_{12}\,b + \ldots + c_{16}\,h$$

$$-a = s_{11}\,X_x + s_{12}\,Y_y + \ldots + s_{16}\,X_y\,;\ \text{ecc.}\ldots$$

dove

$$c_{mn} = c_{nm},\quad s_{mn} - s_{nm}.$$

Cogniti i coefficienti c si determinano le s e viceversa. Dalla teoria sviluppata non risultano dunque necessarie le relazioni (1) di Cauchy-Poisson. I coefficienti c sono caratteristici del corpo e dipendono dal sistema di assi coordinati scelti; non hanno in generale alcun significato fisico speciale, e si chiamano *costanti isotermiche di elasticità*. Ricavando inversamente le $a, b, \ldots h$ in funzione delle $X_x, \ldots$ si introducono altri 21 coefficienti e sono quelli che in pratica si vengono effettivamente a determinare. I corpi anisotropi sarebbero quindi meglio definiti dalle s_{mn}. Esse sono state chiamate dal Voigt: *moduli isotermici di elasticità*.

Si considerano inoltre i moduli e le costanti elastiche *adiabatiche* corrispondenti alle deformazioni adiabatiche e che figurano, più specialmente, nei problemi di moto dei corpi elastici; mentre quelli

isotermici figurano nella teoria dell'equilibrio. Gli isotermici sono più piccoli degli adiabatici e la loro differenza non è mai troppo grande. Così nel salgemma (e pei cristalli del sistema regolare) queste differenze riguardano solo i valori di c_{11} e c_{12} e sono all'incirca (e nelle solite unità) 13,50 *.

Se nelle formule che esprimono le $a, \ldots$ per le $X_x, \ldots$ supponiamo nulle tutte le componenti speciali eccetto X_x, il rapporto tra a ed X_x dicesi modulo di Young relativo alla direzione x; e così può dirsi per y e z. Accennandoli con E_1, E_2, E_3, avremo *i tre moduli principali*

$$E_1 = -\frac{1}{s_{11}}, \quad E_2 = -\frac{1}{s_{22}}, \quad E_3 = -\frac{1}{s_{33}}.$$

I rapporti di $-b$ e $-c$ ad a diconsi i due rapporti di Poisson relativi ad x; accennandoli con $\varkappa_{12}$, $\varkappa_{13}$ avremo

$$\varkappa_{12} = -\frac{s_{12}}{s_{11}}, \quad \varkappa_{13} = -\frac{s_{13}}{s_{11}};$$

e così ne avremo due relativi ad y e due relativi a z; cioè *sei rapporti principali di Poisson.*

Per i corpi isotropi i tre moduli di Young si riducono ad un solo, come pure i rapporti di Poisson e si riottengono precisamente le formule (4) del Cap. precedente.

Poichè in ogni molecola le rette principali di deformazione sono definite da tre equazioni, rife-

* Voigt: *Thermodynamik*, l. c., p. 337.

rendoci a questi come assi, i coefficienti o i moduli di elasticità si ridurrebbero a 18; ma è conveniente lasciare indeterminata l'orientazione degli assi, che in ogni problema converrà scegliere in modo opportuno.

Circa poi la determinazione di questi moduli sarà detto qualche cosa in seguito.

§ 5. Formule per la trasformazione. — Teniamo presenti le posizioni e i risultati del § 7 del Cap. 3°, e siano c_{mn} i coefficienti, s_{mn} i moduli di elasticità relativi alla terna x, y, z; c'_{mn}, s'_{mn} quelli relativi alla terna x', y', z'.

Otterremo la trasformazione delle c nelle c', valendoci di alcune note proprietà delle forme quadratiche.

Per ragioni di simmetria diciamo x_i, x'_i le componenti di deformazione; X_i, X_i le componenti speciali di pressione con segno cambiato. Il potenziale unitario è rappresentato dalla forma quadratica

$$f = \sum c_{pq} x_p x_q ,$$

oppure dalla forma reciproca

$$F = \sum s_{pq} X_p X_q .$$

Inoltre è

$$X_p = \sum c_{pq} x_q , \tag{7}$$

$$x_i = \sum s_{ij} X_j ; \tag{8}$$

le quali rispettivamente trasformano F in f e reciprocamente.

Conforme poi al § 7 del Cap. 3°, abbiamo da considerare la trasformazione ortogonale

$$x_h = \sum \gamma_{hi} x'_i \,, \tag{9}$$

e la inversa

$$x'_q = \sum \gamma_{iq} x_i \,. \tag{10}$$

Colla (9) la f si muta in f' e se poniamo

$$f' = \sum c'_{pq} x'_p x'_q = \sum c_{hk} x_h x_k =$$
$$= \sum c_{hk} \gamma_{hi} \gamma_{kj} x'_i x'_j \,,$$

risulta subito

$$c'_{pq} = \sum \gamma_{hp} \gamma_{kq} c_{hk} \tag{11}$$

che dà la regola per la trasformazione delle costanti elastiche.

Passiamo ai moduli e sia F' la reciproca di f', cioè

$$F' = \sum s'_{pq} X'_p X'_q \,,$$

che colla sostituzione analoga alla (7)

$$X'_p = \sum c'_{pq} x'_q \,,$$

si muta in f'. Ma questa colla (10) si muta in f, la quale a sua volta colla (8) si muta in F; sicchè la F' si trasforma in F colla sostituzione prodotto

$$X'_p = \sum c'_{pq} \gamma_{iq} s_{ij} X_j \,;$$

od anche per la (11)

$$X'_p = \sum c_{hk} \gamma_{hp} \gamma_{kq} \gamma_{iq} s_{ij} X_j \,.$$

Sommando rispetto a q e notando che

$$\sum \gamma_{hq}\, \gamma_{iq}$$

è *zero* od *uno* secondo che k è diverso o eguale ad i, risulta

$$X'_p = \sum c_{hk}\, \gamma_{hp}\, s_{kj}\, X_j\,.$$

Sommando rispetto a k ed osservando ancora che

$$\sum c_{hk}\, s_{kj}$$

è *zero* od *uno* secondo che h è diverso o eguale ad j, risulta

$$X'_p = \sum \gamma_{hp}\, X_h$$

cioè *la F' si trasforma in F colla sostituzione trasposta della* (9).

Di qui si deduce inversamente

$$X_h = \sum \gamma_{hi}\, X'_i\,;$$

onde, come per la (11),

$$s'_{pq} = \sum \gamma_{hp}\, \gamma_{kq}\, s_{hk}\,. \qquad (12)$$

Sviluppando p. e. s'_{33} che ha, come vedremo, uno speciale interesse, si ha

$$s'_{33} = \gamma_{13}^2\, s_{11} + \gamma_{23}^2\, s_{22} + \gamma_{33}^2\, s_{33} + \ldots + \gamma_{63}^2\, s_{66}$$
$$+ 2\, \gamma_{13}\, \gamma_{23}\, s_{12} + \ldots$$

Se in particolare il sistema è trimetrico (vedi più sotto § 8) si hanno i soli nove moduli s_{ii}, s_{23}, s_{31}, s_{12}, se gli assi x, y, z sono gli assi di

simmetria: e inoltre

$$\gamma_{13} = \alpha_3^2, \ \gamma_{23} = \beta_3^2, \ \gamma_{33} = \gamma_3^2, \ \gamma_{43} = \beta_3 \gamma_3, \ \ldots$$

quindi

$$s'_{33} = \alpha_3^4 s_{11} + \beta_3^4 s_{22} + \gamma_3^4 s_{33} + (s_{44} + 2 s_{23}) \beta_3^2 \gamma_3^2 + \ldots * \quad (4')$$

§ 6. **Cenno sulla teoria molecolare del prof. Voigt.** — Osserviamo col Voigt che se non ci proponessimo altro scopo che quello di ottenere le leggi elementari della elasticità sotto una forma rispondente alla realtà, dovremmo dichiararci soddisfatti della teoria delle azioni immediate. Ma sorge spontanea la domanda: perchè l'ipotesi molecolare, che ha pur fatto ottenere risultati tanto notevoli in altri campi della fisica, conduce nella elasticità a risultati inesatti? Tale ricerca è poi molto istruttiva riguardo alla teoria della costituzione della materia.

Ora questa ricerca ha mostrato che l'antica teoria molecolare della elasticità parte da un concetto inutilmente specializzato; cioè *dalla ipotesi che le azioni molecolari siano centrali, oltre che dipendenti dalla sola distanza, e non ha fallito che per questo.*

Una riflessione assai semplice sul meccanismo dell'accrescimento dei cristalli avrebbe d'altra parte dovuto convincere della inammissibilità di questa ipotesi; perchè la formazione regolare di un cristallo in una dissoluzione o in una massa

---

* Vedi la mem. già citata del prof. Voigt: *Wied. Ann.*, **16**; 1882.

fusa non è concepibile altro che se un momento direttore agisce sulla particella che va ad associarsi al cristallo, dandogli una orientazione parallela a quelle che fanno già parte dell'edificio. L'esistenza di questi momenti esige quella di un potenziale dell'azione mutua, dipendente da orientazione e questo, a sua volta, conduce a forze che variano pure colla orientazione della molecola e non sono, in generale, centrali.

Ciò posto il Prof. Voigt, *supponendo il corpo come formato da un aggregato di corpuscoli, cioè discontinua la materia; supponendo che ogni corpuscolo risenta dagli altri delle azioni riducibili ad una forza e ad una coppia decrescenti indefinitamente col crescere della distanza; ha ritrovato le equazioni generali della elasticità sotto la stessa forma ottenuta colla teoria del potenziale, senza che siano necessariamente verificate le relazioni di Cauchy-Poisson* *.

Non potendo esporre la minuziosa analisi del prof. Voigt, accenneremo invece brevemente al procedimento del Poincaré.

Sia $M(x, y, z)$ una molecola nel suo stato naturale; u, v, w le componenti del suo spostamento; A, B, C le componenti delle forze interne molecolari che si esercitano su M. Il lavoro di queste forze interne, pel teorema della conservazione del-

* Questa teoria trovasi esposta nei *Theoretische Studien über die Elasticitätsverältnisse der Krystalle.* 1er Theil: *Ableitung der Grundgleichungen aus der Annahme mit Polarität begabter Moleküle.* Abhand. der König. Gesell. der Wiss. zu Göttingen, **34**, 1887.

l'energia, è tale che

$$\sum (A\,d\,u + B\,d\,v + C\,d\,w) = d\,U,$$

dove U è funzione delle varie $x + u, \ldots$ dipendente dalle sole distanze delle molecole due a due. Le u, v, w essendo supposte infinitamente piccole, terremo

$$U = U_0 + U_1 + U_2,$$

con U_i omogenea di grado i nelle u, v, w.

Diciamo M_1 un'altra molecola di coordinate $x + \xi, \ldots$; r il quadrato della sua distanza da M, che dopo la deformazione diventi $r + \rho$; $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$ le componenti di spostamento Sarà

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$

con

$$\rho_1 = 2\,(\xi\,\Delta\,u + \ldots); \quad \rho_2 = \Delta\,u^2 + \Delta\,v^2 + \Delta\,w^2.$$

Sviluppiamo ora in serie la U, funzione delle varie $r + \rho$; tenendo conto che, entro gl'imposti limiti di approssimazione, si può sostituire ρ_1^2 a ρ^2 e $\rho_1\,\rho_1'$ a $\rho\,\rho'$, si ha

$$U_1 = \sum \frac{\partial\,U}{\partial\,r}\,\rho_1,$$

$$U_2 = \sum \frac{\partial\,U}{\partial\,r}\,\rho_2 + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2\,U}{\partial\,r^2}\,\rho_1^2 + \sum \frac{\partial^2\,U}{\partial\,r\,\partial\,r'}\,\rho_1\,\rho'_1;$$

la somma va estesa a tutte le coppie di molecole di cui si immagina composto il corpo.

Dividiamo questo in elementi di volume $d\tau$ tali che in ognuno di essi le u, v, w e le loro derivate si possano ritenere costanti, ma grandissime rispetto al raggio di attività molecolare. Siano $d\tau'$, $d\tau''$ due di questi elementi contigui; la U_1 relativa al volume somma consta delle parti relative a $d\tau'$ e $d\tau''$ e di quella relativa alle coppie di molecole prese l'una in $d\tau'$ e l'altra in $d\tau''$, in modo che la loro distanza sia inferiore al raggio di attività molecolare e però contenute in una zona infinitamente piccola rispetto a $d\tau'$ e $d\tau''$. Tale parte essendo trascurabile, la U_1 relativa a tutto il corpo si compone della somma dei valori relativi ai singoli elementi $d\tau$. Lo stesso vale per U_2; quindi basterà estendere in U_1 e U_2 la sommatoria alle molecole di $d\tau$ e poscia fare la somma dei valori così ottenuti per tutti gli elementi $d\tau$. Diciamo U_1' ed U_2' le sommatorie nel primo senso dichiarato.

In un elemento $d\tau$ sarà

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta, \text{ ecc.} \ldots;$$

e quindi

$$\rho_1 = 2\,(a\,\xi^2 + b\,\eta^2 + c\,\zeta^2 + f\,\eta\,\zeta + \ldots),$$

$$\rho_2 = p_{11}\,\xi^2 + \ldots + 2\,p_{23}\,\eta\,\zeta + \ldots,$$

dove le p_{rs} hanno significati evidenti.

Con ciò la

$$U_1' = 2\,(a\,\Sigma\frac{\partial U}{\partial r}\xi^2 + \ldots + f\,\Sigma\frac{\partial U}{\partial r}\eta\,\zeta + \ldots)$$

è espressa da una funzione lineare, omogenea delle sei componenti di deformazione e dipende quindi da *sei* costanti.

La U_2' consta di tre parti.

La prima è lineare ed omogenea nelle p_{rs} e cogli stessi coefficienti di U_1'.

La seconda, quadratica omogenea nelle ρ_1, è pure quadratica omogenea nelle $a, b, \ldots h$ e contiene 21 coefficienti; ma non sono tutti distinti. Infatti

$$\rho_1^2 = \alpha_{11} a^2 + \ldots + \alpha_{66} h^2 + 2 \alpha_{23} b c + \ldots,$$

dove

$$\alpha_{11} = 4 \xi^4, \ldots, \qquad \alpha_{44} = 4 \eta^2 \zeta^2, \ldots$$

$$\alpha_{23} = 4 \eta^2 \zeta^2, \ldots, \quad \alpha_{14} = 4 \xi^2 \eta \zeta, \ldots;$$

eliminando le ξ, η, ζ, otteniamo 18 relazioni tra le α, di cui solo sei lineari, cioè

$$\alpha_{23} = \alpha_{44} \ldots; \quad \alpha_{14} = \alpha_{56}, \ldots$$

Quindi risulterà

$$\frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \rho_1^2 = c_{11} a^2 + \ldots + 2 c_{23} b c + \ldots$$

con

$$c_{23} = 2 \sum \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \alpha_{23}, \quad c_{44} = 2 \sum \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \alpha_{44}; \ldots$$

e però

$$c_{23} = c_{44}, \ldots; \quad c_{14} = c_{56}, \ldots;$$

che sono precisamente le (1); ma non sussisteranno più tra le c relazioni analoghe a quelle non lineari delle α; dunque la seconda parte di U'_2 contiene soltanto *quindici* coefficienti distinti.

La terza parte finalmente, ancor essa quadratica ed omogenea nelle $a, b, \ldots h$, contiene 21 coefficienti tutti distinti. Basta osservare che il prodotto $\rho_1 \rho_1'$ è esso stesso quadratico ed omogeneo nelle $a, b, \ldots h$ e con coefficienti dipendenti da $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$; tra questi sussistono quindi 15 relazioni, nessuna delle quali è lineare.

Dunque l'espressione completa di U_1' e U_2' contiene, in generale, *ventisette* coefficienti distinti.

Consideriamo ora tre casi particolari.

1.° *forze esterne nulle nello stato naturale.*

Essendo $u = v = w = 0$, tra le equazioni di equilibrio devono figurare le seguenti

$$\frac{\partial U_1}{\partial u} = \frac{\partial U_1}{\partial v} = \frac{\partial U_1}{\partial w} = 0;$$

sarà dunque U_1 e quindi U'_1 nulla; cioè

$$\Sigma \frac{\partial U}{\partial r} \xi^2 = \ldots = \Sigma \frac{\partial U}{\partial r} \eta \zeta = \ldots = 0;$$

e però è nulla anche la prima parte di U'_2; sicchè i coefficienti si riducono a *ventuno.*

2.° *le forze molecolari siano forze centrali (antica teoria molecolare).* Allora, com'è notissimo

$$U = \varphi(r + \rho) + \varphi'(r' + \rho') + \ldots;$$

quindi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r \, \partial r'} = 0,$$

la terza parte di U'_2 è nulla; i coefficienti si riducono a *ventuno* e sussistono le relazioni di Cauchy.

3.° *le due ipotesi precedenti sussistano contemporaneamente;* la terza parte di U'_2 è nulla e i coefficienti si riducono a *quindici.*

Applicando ora il principio dei lavori virtuali si ottengono le note equazioni indefinite ed ai limiti per l'equilibrio con un numero di costanti dato dai numeri precedenti *.

§ 7. Forme del potenziale di elasticità per i vari sistemi cristallini. — In un cristallo, ridotto a forma determinata, dicesi simmetria di forma la proprietà di sovrapporsi a sè stesso con certe operazioni geometriche: rotazioni, riflessioni, rispetto ad un piano, inversioni rispetto ad un centro, in modo che le direzioni della prima posizione coincidano con quelle della seconda che loro sono equivalenti dal punto di vista dei fenomeni di accrescimento e dissoluzione.

L'esperienza ha poi mostrato che è sempre verificata la seguente legge di F. Neumann: *le posizioni equivalenti dal punto di vista della forma, lo sono ancora rispetto alle proprietà fisiche.*

Per rispetto alle relazioni di simmetria si distinguono 32 gruppi di cristalli secondo la classi-

* POINCARÉ: *Leç. sur la Théorie de l'élast.* p. 27 e seg.

ficazione di Schönflies * e questi si aggruppano, com' è noto, in sette sistemi. Vediamo, nei singoli casi, le forme che assume il potenziale.

Se il corpo è affatto qualunque (come p. e. i cristalli del *sistema triclino*) il potenziale non riceve alcuna semplificazione e contiene 21 coefficienti distinti.

Supponiamo che il corpo ammetta un piano di simmetria (cristalli del *sistema monoclino*) p. e il piano yz. Mutando quindi x in $-x$, in virtù della legge di Neumann, Π non deve mutare.

Per due particelle simmetriche rispetto yz siano $a, b, \ldots h$; $a', b' \ldots h'$ le componenti di deformazione: u, v, w; u', v', w' quelle di spostamento. Sarà

$$u' = -u, \; v' = v, \; w' = w,$$

e quindi

$$a' = \frac{\partial u'}{\partial(-x)} = \frac{\partial u}{\partial x} = a, \; b' = b, \; c' = c, \; f' = f$$

$$g' = \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial(-x)} = -g, \; h' = -h.$$

Dunque Π deve restare invariato mutando g in $-g$ ed h in $-h$; debbono quindi annullarsi tutti i coefficienti c dei termini che contengono sola-

* A. Schönflies, *Krystallsysteme und Krystallstructur*, Leipzig, 1891. Vedi la recensione del prof. Somigliana nel Giornale di Mineralogia, Cristallografia e Petrografia, **4**; 1893.

mente g o solamente h a primo grado; cioè

$$c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{45} = c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{46} = 0.$$

Qui è intanto soddisfatta una delle relazioni (1) cioè la quinta. I coefficienti di elasticità da 21 si riducono a 13.

Supponiamo ora che il corpo abbia due (e quindi tre) piani di simmetria ortogonali (cristalli del *sistema trimetrico*); se anche il piano $z\,x$ è un piano di simmetria, il potenziale non deve mutare cambiando h ed f in $-h$ e $-f$; dunque debbono annullarsi i coefficienti dei termini che contengono solamente h o solamente f a primo grado; cioè

$$c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{56} = c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{54} = 0,$$

sicchè dei nuovi vanno a zero:

$$c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{56} = 0\,.$$

È ora facile vedere che Π non muta cambiando f e g in $-f$ e $-g$; i coefficienti si riducono a 9: cioè

$$\left.\begin{aligned} 2\,\Pi = {} & c_{11}\,a^2 + c_{22}\,b^2 + c_{33}\,c^2 + c_{44}\,f^2 + \\ & + c_{55}\,g^2 + c_{66}\,h^2 + 2\,c_{23}\,b\,c + 2\,c_{31}\,c\,a + 2\,c_{12}\,a\,b. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

La teoria molecolare antica esigerebbe ancora

$$c_{44} = c_{23},\ c_{55} = c_{31},\ c_{66} = c_{12},$$

e i coefficienti da 9 si ridurrebbero a 6.

Il prof. Voigt ha determinato le costanti c per alcuni cristalli di questo sistema *; l'unità di pressione essendo 10^6 grammi per cmq. si ha

$$\begin{array}{lllll} \textit{topazio:} & c_{11} = 2870\,; & c_{22} = 3560\,; & c_{33} = 3000\,; \\ & c_{44} = 1100\,; & c_{55} = 1350\,; & c_{66} = 1340\,; \\ & c_{23} = \ \ 900\,; & c_{31} = \ \ 860\,; & c_{12} = 1280\,; \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} \textit{barite:} & 907\,; & 800\,; & 1074 \\ & 122\,; & 293\,; & 283 \\ & 278\,; & 275\,; & 468. \end{array}$$

Le relazioni (1) non sono verificate; solo per la barite si ha approssimativamente:

$$c_{55} = c_{31}\,.$$

È stato verificato che con questi valori la Π è effettivamente funzione quadratica omogenea definita positiva.

Supponiamo che due degli assi di simmetria siano tra loro elasticamente permutabili *(sistema dimetrico)*. Il potenziale è intanto della forma (7); inoltre non deve mutare cambiando x in y e quindi u in v; ma con ciò a si muta in b; f in g: cioè Π deve essere simmetrica rispetto a e b e rispetto f e g; quindi

$$c_{11} = c_{22}\,; \quad c_{44} = c_{55}\,; \quad c_{13} = c_{23}\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\,\Pi = c_{11}\,(a^2 + b^2) + c_{33}\,c^2 + 2\,c_{23}\,(b\,c + c\,a) \\ \quad + 2\,c_{12}\,a\,b + c_{44}\,(f^2 + g^2) + c_{66}\,h^2. \end{array}\right\} \quad (8)$$

---

* *Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Topas und Baryt.* Wied. Ann. **34**; pag. 981, 1888.

Le costanti si riducono a sei.

Se infine tutti gli assi di simmetria sono elasticamente permutabili (*sistema monometrico*), Π deve risultare simmetrico rispetto a, b, c e f, g, h; quindi

$$\left.\begin{aligned} 2\,\Pi = c_{11}\,(a^2 + b^2 + c^2) + \\ + 2\,c_{12}\,(b\,c + c\,a + a\,b) + c_{44}\,(f^2 + g^2 + h^2) \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

I coefficienti si riducono a tre; mentre le relazioni (1) vorrebbero ancora

$$c_{44} = c_{12}.$$

Per i cristalli di questo sistema i tre moduli principali di Young si riducono ad un solo, espresso da:

$$E = c_{11} - \frac{2\,c_{12}^2}{c_{11} + c_{12}};$$

e così i sei rapporti di Poisson si riducono al solo

$$\varkappa = \frac{c_{12}}{c_{11} + c_{12}}.$$

Il coefficiente c_{44}, come pei corpi isotropi, dicesi la *rigidità principale.*

Il prof. Voigt * sperimentando i seguenti cristalli ha trovato:

Pirite

$$c_{11} = 3680; \quad c_{44} = 1075; \quad c_{12} = -483$$

* *Wied. Ann.*, **35**; pag. 642.

Fluorospato

$$c_{11} = 1670\,; \quad c_{44} = 345\,; \quad c_{12} = 457\,.$$

Salgemma

$$c_{11} = 477\,; \quad c_{44} = 129\,; \quad c_{12} = 132$$

Cloruro di potassio

$$c_{11} = 375\,; \quad c_{44} = 65{,}5\,; \quad c_{12} = 198.$$

La relazione di Cauchy è approssimativamente verificata pel salgemma; mentre per la pirite offre la maggior contradizione.

Per questi cristalli è rispettivamente

$$E = 3530\,, \quad 1479\,, \quad 418\,, \quad 372.$$

Inoltre per la pirite è

$$\varkappa = -\,0{,}12.$$

Supponiamo che il corpo possegga sette piani di simmetria; uno normale all'asse z e gli altri sei disposti simmetricamente intorno a questo (*sistema esagonale*). Facciamo eseguire alla coppia $x\,y$ una rotazione di 60° intorno z; otterremo una nuova terna x', y', z' definita (coi suoi coseni direttori), dal quadro

	x	y	z
x'	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
y'	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
z'	0	0	1

Le componenti di deformazione rispetto alla nuova terna siano: a', $b' \ldots h'$ applicando le formule del § 7. Cap. 3°, troviamo

$$4a' = a + 3b + \sqrt{3}\,h\,;\quad 4b' = 3a + b - \sqrt{3}\,h\,;\quad c' = c$$

$$2f' = f - \sqrt{3}\,g\,;\quad 2g' = \sqrt{3}\,f + g\,;$$

$$2h' = -\sqrt{3}\,a + \sqrt{3}\,b + h.$$

La forma del potenziale è anzitutto quella (7) del sistema trimetrico. Sostituendo alle $a, b, \ldots h$, le $a', b', \ldots h'$, Π non deve mutare. Fatta la sostituzione si trova che il coefficiente di a^2 (cioè c_{11}) e quello di b^2 sono rispettivamente dati da

$$\frac{3}{4}c_{66} + \frac{1}{16}c_{11} + \frac{9}{16}c_{22} + \frac{6}{16}c_{12}\,;$$

$$\frac{9}{16}c_{11} + \frac{1}{16}c_{22} + \frac{3}{4}c_{66} + \frac{6}{16}c_{12}\,;$$

si hanno quindi le due equazioni

$$c_{11} + 9\,c_{22} + 12\,c_{66} + 6\,c_{12} = 16\,c_{11}$$

$$9\,c_{11} + c_{22} + 12\,c_{66} + 6\,c_{12} = 16\,c_{22}\,,$$

dalle quali per sottrazione si deduce

$$c_{11} = c_{22}$$

e quindi

$$2\,c_{66} = c_{11} - c_{12}\,.$$

I coefficienti di f^2 e g^2 sono rispettivamente

dati da

$$\frac{1}{4} c_{44} + \frac{3}{4} c_{55} \; ; \quad \frac{3}{4} c_{44} + \frac{1}{4} c_{55} \; ;$$

onde

$$c_{44} + 3\, c_{55} = 4\, c_{44} \; ; \quad 3\, c_{44} + c_{55} = 4\, c_{55} \; ;$$

quindi

$$c_{44} = c_{55} .$$

Il coefficiente di $h\,c$ è nullo e ci dà ancora

$$c_{23} = c_{31} \, .$$

Senza ora continuare nel confronto dei vari coefficienti, possiamo osservare che, tenendo conto delle relazioni già trovate, la forma (7) diventa

$$2\,\Pi = c_{11}\,(a^2 + b^2) + c_{33}\,c^2 + 2\,c_{23}\,(a + b)\,c + c_{44}\,(f^2 + g^2) + c_{66}\,h^2 + (2\,c_{11} - 4\,c_{66})\,a\,b \; ;$$

oppure

$$\left.\begin{aligned} 2\,\Pi = {} & c_{11}\,(a + b)^2 + c_{33}\,c^2 + 2\,c_{23}\,(a + b)\,c + \\ & + c_{44}\,(f^2 + g^2) + c_{66}\,(h^2 - 4\,a\,b) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Allora $2\,\Pi$ essendo una combinazione lineare degli invarianti ortogonali di rotazione (Cap. 3°, § 5) non muta qualunque sia la rotazione che si imprime al sistema $x\,y$: essa è dunque la forma richiesta.

Essa contiene 5 costanti e spetta ancora a quei corpi (legnami, materiali da costruzione) che presentano *isotropia incompleta.*

Le relazioni (1) richiederebbero ancora

$$c_{44} = c_{23}.$$

Le esperienze del prof. Voigt sul *Berillo* * hanno dato i seguenti risultati

$$c_{11} = 2746;\ c_{33} = 2409;\ c_{23} = 674;\ c_{44} = 666;\ c_{66} = 883;$$

la (1) è approssimativamente soddisfatta.

Si considera dai cristallografi ancora la forma emiedrica del sistema esagonale come un settimo sistema *(romboidale)*.

Se consideriamo un esagono regolare di vertici opposti A, A'; B, B'; C, C' dovremo considerare dei piani alternati passanti per l'asse ZZ', normale all'esagono nel suo centro; così le facce del romboedro sono: ZAB, $Z'BC$, ZCA', $Z'A'B'$, $ZB'C'$, $Z'C'A$.

Queste forme e quindi Π debbono restare inalterate per una rotazione di 180° intorno AA' e di 120° intorno ZZ'. Procedendo come nel caso precedente si trova

$$\left.\begin{aligned} 2\Pi = {} & c_{11}(a^2+b^2) + c_{33}c^2 + \\ & + 2c_{23}(a+b)c + 2c_{12}ab + \\ & + c_{44}(f^2+g^2) + \frac{1}{2}(c_{11}-c_{22})h^2 + \\ & + 2c_{14}(af - bg + fg) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

* *Wied. Ann.* **31**, pag. 474, 1887

con sei costanti. Le relazioni (1) diventano

$$c_{44} = c_{23}; \; c_{12} = c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

cioè

$$c_{44} = c_{23}; \; 3\, c_{12} = c_{11}.$$

Le esperienze del prof. Voigt * sul *quarzo* hanno invece dato

$$c_{11} = 868; \; c_{33} = 1074; \; c_{23} = 143.$$
$$c_{12} = 70; \; c_{44} = 582; \; c_{14} = 171;$$

le relazioni (1) non sono soddisfatte.

Supponiamo finalmente si tratti di un corpo isotropo, di un corpo cioè che si comporti egualmente in tutti i sensi per riguardo alle proprietà elastiche. La forma di Π sarà anzitutto quella che spetta alla isotropia incompleta rispetto l'asse z cioè la (10). Lo stesso deve valere per l'asse x; onde

$$2\,\Pi = c'_{11}\, a^2 + c'_{33}\,(b + c)^2 +$$
$$+ 2\, c'_{23}\,(b + c)\, a + c'_{44}\,(h^2 + g^2) + c'_{66}\,(f^2 - 4\, b\, c),$$

che non deve differire dalla (10), quindi

$$c'_{11} = c_{11} = c'_{33} = c_{33}; \; c'_{44} = c_{66} = c_{44} = c'_{66};$$
$$2\, c_{23} = -4\, c'_{66} + 2\, c'_{33}$$

---

* Ibidem.

e però

$$2\Pi = c_{11}\{(a+b)^2 + c^2\} + c_{44}(f^2 + g^2 + h^2 - 4ab) + \\ + 2(c_{11} - 2c_{44})(a+b)c$$

od anche

$$2\Pi = c_{11}(a+b+c)^2 + \\ + c_{44}(f^2 + g^2 + h^2 - 4bc - 4ca - 4ab),$$

che è una combinazione lineare dell'invariante quadratico e del quadrato dell'invariante lineare; dunque Π resterà invariato in qualunque trasformazione ortogonale. La forma precedente è identica con quella già trovata al Cap. 4° § 4 partendo da un'altra definizione dei corpi isotropi. *Si conclude però l'identità delle due definizioni* come avevamo accennato al § 3 dello stesso capitolo *.

Si può inversamente dimostrare che non facendo alcuna ipotesi sulla struttura del corpo elastico considerato, se si cercano le forme che può assumere il potenziale di elasticità per effetto di proprietà di simmetria, si trova che esse sono tutte e solo quelle che abbiamo trovate col procedimento diretto esposto in questo paragrafo **.

---

* Abbiamo seguito in tutta questa deduzione il metodo di MINNIGERODE, *Nachrichten v. d. König. Gesell. zu der Wiss. zu Göttingen*, 1884; *Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse auf die Elasticität fester Körper;* metodo seguito anche dal Love nel libro già citato. Vedi pure: STONY, *On the Elastic Potential of Crystals.* American Journal of Mathematics, 1; 1878.

* SOMIGLIANA, *Sul potenziale elastico.* Annali di mat. 7; 1902.

Vedi anche le due note dei *Rend. Acc. d. Lincei*, marzo 1894; gennaio 1895.

§ **8. Conclusioni del prof. Voigt.** — Nell'ultimo capitolo daremo un cenno dei metodi adoperati dal prof. Voigt per la determinazione delle costanti elastiche o meglio svilupperemo i loro fondamenti teorici *. Accenniamo tuttavia le conclusioni che, allo stato attuale della scienza, si sono potute ricavare da queste ricerche.

1.° *L'ipotesi di forze molecolari agenti secondo la linea dei centri delle molecole e dipendenti dalla sola distanza deve essere definitivamente rigettata.*

2.° *Le formule con 21 costanti (poli-costanti) si debbono considerare come in perfetto accordo colle osservazioni, entro i limiti nei quali è valida la legge di Hooke.*

3.° *I cristalli cubici, benchè otticamente isotropi, sono elasticamente anisotropi.*

4.° *I cristalli del sistema romboedrico, benchè otticamente equivalenti a quelli del sistema esagonale, sono estremamente diversi rispetto alle loro proprietà elastiche.*

Così la dolomite che cristallograficamente rassomiglia tanto allo spato, ne è estremamente diversa per le proprietà elastiche.

5.° *Come, in generale, nei corpi isotropi così anche in alcuni cristalli, una dilatazione longitudinale è accompagnata da una contrazione tra-*

---

* Voigt, *Allgemeine Formeln für die Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Krystallen durch die Beobachtung der Biegung und Drillung von Prismen.* Wied. Ann **16**; pag. 273, 1882. — *Ueber die Torsion eines rechtigen Prismas aus homog. krystall. Substanz*, ibidem, **29**; pag. 604.

sversale, come nel topazio; altri cristalli invece per una dilatazione nel senso degli assi principali subiscono una dilatazione trasversale: come p. e. la pirite ed il clorato di sodio.

In quanto poi ai *corpi isotropi* si deve osservare che *applicando loro la teoria del Voigt, si ottengono le equazioni dell'equilibrio con una sola costante.* Però il prof. Voigt non esita ad abbandonare il solito concetto di corpi isotropi.

Tutti i metalli, quasi tutte le rocce compatte, si presentano come aggregati di cristalli di grandezza variabile a seconda delle circostanze e uniti in tutte le possibili orientazioni: in certi corpi, p. e. in alcune specie di vetri colorati, la stessa struttura è resa visibile colla corrosione di una superficie levigata.

Ora il prof. Voigt ha dimostrato che ammettendo i corpi isotropi formati di frammenti di cristalli assai piccoli, si trovano le equazioni dell'elasticità con due costanti e per le quali il rapporto di Poisson può assumere qualunque valore.

§ 9. Equazioni di equilibrio ed univocità della soluzione delle stesse. — Poichè le componenti di pressione sono funzioni lineari od omogenee delle componenti di deformazione, cioè

$$-X_x = c_{11}\,a + \ldots + c_{16}\,h = c_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots +$$

$$+ c_{16}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \text{ ecc.}\ldots;$$

abbiamo

$$-\frac{\partial X_x}{\partial x} = c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \ldots +$$

$$+ c_{16}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right), \text{ ecc.}$$

Sostituendo queste espressioni nelle equazioni indefinite ed ai limiti per l'equilibrio di un corpo continuo (Cap. 3°, form. 20 e 21) otteniamo che: *le equazioni indefinite per l'equilibrio di un corpo elastico anisotropo sono equazioni differenziali simultanee del secondo ordine rispetto alle derivate parziali delle componenti di spostamento, lineari e, per una determinata terna di assi, con coefficenti costanti.*

Esporremo nel Cap. 6.° alcune delle recenti ricerche sul problema della esistenza della soluzione delle equazioni generali dell'elasticità. Ammesso che tale soluzione esista, dimostriamo che essa è unica.

Premettiamo la semplice dimostrazione di una identità.

Si voglia trasformare il seguente integrale:

$$\int\left\{X_x\frac{\partial u'}{\partial x} + \ldots + Y_z\left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}\right) + \ldots\right\} d\,S.$$

La espressione sotto integrale è la somma di tre espressioni che si deducono dalla seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x}(X_x u' + X_y v' + X_z w') - \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)u'.$$

Trasformiamo ognuna di queste col lemma di Gauss, e notiamo che sussiston sempre le (4); giungeremo quindi alla seguente identità:

$$\left.\begin{aligned}&\int\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial a}\frac{\partial u'}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial \Pi}{\partial f}\left(\frac{\partial w'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial z}\right)+\ldots\right\}dS=\\&=\int\left\{\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)u'+\ldots\right\}dS+\\&+\int\{(X_x\cos(n,x)+X_y\cos(n,y)+\ldots)u'+\ldots\}d\sigma.\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Dimostriamo ora che:
la soluzione generale delle equazioni dell'equilibrio elastico è unica quando in superficie sono dati gli spostamenti oppure le forze.

Supponiamo invece che esistano due soluzioni u', v', w' ed u'', v'', w''; alla prima corrispondano le pressioni interne $X'_x\ldots$, e le componenti di deformazione a', b', $\ldots h'$; alla seconda le $X''_x,\ldots$ e le a'', b'', $\ldots h''$.

Siano in primo luogo date le pressioni superficiali: allora in ogni punto interno al corpo elastico dovrà aversi:

$$\rho X=\frac{\partial X'_x}{\partial x}+\frac{\partial X'_y}{\partial y}+\frac{\partial X'_z}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial X''_x}{\partial x}+\frac{\partial X''_y}{\partial y}+\frac{\partial X''_z}{\partial z},\ \text{ecc.}$$

ed in ogni punto del contorno:

$$X_n=X'_x\cos(n,x)+\ldots=X''_x\cos(n,x)+\ldots$$

Poniamo:

$$u' - u'' = u,\ a' - a'' = a, \ldots,$$
$$X'_x - X''_x = X_x;\ \text{ecc.} \ldots$$

ed avremo:

$$X_x = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial a'} - \frac{\partial \Pi}{\partial a''}\right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial a};\ \text{ecc.}$$

riguardando Π formato colle a, b, ... allo stesso modo che è formato colle a', ... h'.

Dunque in ogni punto interno del corpo

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0,\ \text{ecc.};\qquad (13)$$

e in ogni punto del contorno:

$$X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y) + X_z \cos(n,z) = 0,\ \text{ecc.}\ (14)$$

Si faccia ora nella (12)

$$u = u';\quad v = v',\quad w = w';$$

in virtù delle (13) e (14) otterremo:

$$\int \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial a} a + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial f} f + \ldots \right\} d\,S = 2 \int \Pi\, d\,S = 0$$

ciò che è assurdo, per essere sempre $\Pi > 0$; a meno che non sia $\Pi = 0$; il che esige

$$a = b = \ldots = h = 0,$$

le due deformazioni a', ... h' ed a'', ... h'' sono dunque identiche e gli spostamenti corrispondenti

(Cap. 3°, § 3) non differiscono che per un moto di corpo rigido.

Se poi in superficie sono prestabiliti gli spostamenti del corpo, abbiamo su σ:

$$u' = u'', \; v' = v'', \; w' = w''$$

e quindi

$$u = v = w = 0$$

e la (12) conduce alla stessa conseguenza.

Lo stesso ragionamento è applicabile anche quando in superficie è data parte delle forze e parte degli spostamenti, ecc.

Possiamo ora poi concludere:

le equazioni indefinite ed al contorno sono necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un corpo elastico.

§ **10. Teorema di reciprocità del Betti.** — Nella (12) supponiamo che le u', v', w' rappresentino le componenti di spostamento dello stesso corpo elastico, soggetto a forze di massa X', Y', Z' ed a forze X'_n, Y'_n, Z'_n agenti al contorno.

Intanto la (12) può scriversi

$$\int \rho (Xu' + \ldots) dS + \int (X_n u' + \ldots) d\sigma = \int \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a} a' + \ldots \right) d S.$$

In modo analogo si trova che

$$\int \rho (X'u + \ldots) dS + \int (X'_n u + \ldots) d\sigma = \int \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a'} a + \ldots \right) dS.$$

Ma essendo Π quadratica ed omogenea si ha

$$a'\frac{\partial \Pi}{\partial a}+\ldots+f'\frac{\partial \Pi}{\partial f}+\ldots=a\frac{\partial \Pi}{\partial a'}+\ldots+f\frac{\partial \Pi}{\partial f'}+\ldots$$

quindi risulta

$$\left.\begin{aligned}&\int \rho(Xu'+Yv'+Zw')\,dS+\\&+\int(X_n u'+Y_n v'+Z_n w')\,d\sigma=\\&=\int \rho(X'u+Y'v+Z'w)\,dS+\\&+\int(X'_n u+Y'_n v+Z'_n w)\,d\sigma\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

la quale esprime il teorema di reciprocità del *Betti* *.

Esso può enunciarsi così:

se un corpo elastico è soggetto a due sistemi di forze, il lavoro compiuto dalle forze del primo sistema quando gli spostamenti sono quelli spettanti al secondo, è uguale al lavoro compiuto dalle forze del secondo quando gli spostamenti sono quelli spettanti al primo.

Nel capitolo seguente vedremo alcune delle numerose e svariate applicazioni di questo tra i più notevoli ed importanti teoremi della teoria della elasticità; ma possiamo fin da ora accennare qualche sua elegante applicazione.

Supponiamo che le componenti della seconda deformazione siano costanti: quindi, come si vede

---

* Betti, *Teoria della elasticità*, Cap. vi, Nuovo Cimento, **7**, **8**, **9**, **10**; 1872. *Ann. d. Matem.* **6**; 1875. La forma dell'enunciato è del Lévy, *Compt. Rend.*, **107**; pag. 414 e 453, 1888.

subito,

$$u' = a'x + h'y + g'z;\ v' = h'x + b'y + f'z;$$
$$w' = g'x + f'y + c'z$$

essendo a', $b' \ldots h'$ delle costanti. Saranno quindi anche costanti le componenti speciali di pressione; p. e. sarà

$$X'_x = A', \ldots \quad X_y = H'.$$

Si vede subito che una tal deformazione è prodotta da forze di massa nulle e da trazioni in superficie di componenti

$$X_n' = A' \cos(n,x) + H' \cos(n,y) + G' \cos(n,z); \text{ ecc.}$$

Il teorema di Betti ci dà

$$\int \rho \{X(a'x + h'y + g'z) + \ldots\} dS +$$
$$+ \int \{X_n(a'x + h'y + g'z) + \ldots\} d\sigma =$$
$$= \int \{u(A' \cos(n,x) + H' \cos(n,y) + G' \cos(n,z)) + \ldots\} d\sigma =$$
$$= -A' \int \frac{\partial u}{\partial x} dS - \ldots - G' \int \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) dS + \ldots$$

Dando particolari valori alle $A', \ldots H'$, potremo, risolvendo solamente delle equazioni lineari, trovare le $a', \ldots h'$.

Facendo quindi

$$A' = B' = C' = 1;\ G' = F' = H' = 0$$

potremo *trovare la dilatazione cubica totale del corpo espressa per le forze di massa e per le tensioni in superficie.*

Nel caso particolare dei corpi isotropi

$$-A' = \lambda(a' + b' + c') + 2\mu a', \quad -F' = 2\mu f', \text{ecc.}\ldots$$

come risulta dalle (12) del Cap. 4.°; e per le ipotesi suddette sarà

$$f' = g' = h' = 0 \text{ ed } a' = b' = c'$$

donde

$$3\lambda a' + 2\mu a' = 1;$$

$$a' = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}:$$

e però

$$(3\lambda + 2\mu)\int \Theta\, dS = \int \rho\,(Xx + Yy + Zz)\, dS + \\ + \int (X_n x + \ldots)\, d\sigma.$$

Se in particolare

$$X = Y = Z = 0$$

$$X_n = P\cos(n\,x), \ldots$$

cioè se il solido è soggetto ad una sola pressione normale in superficie e costante, poichè

$$\int (x\cos(n,x) + y\cos(n,y) + z\cos(n,z))\, dS = -3\,S,$$

risulta

$$(3\lambda + 2\mu)\int \Theta\, dS = -3\,S\,P.$$

pure tra loro indipendenti; onde deve essere

$$\frac{\partial Q_r}{\partial q_s} - \frac{\partial Q_s}{\partial q_r} = 0$$

cioè la forma proposta è un differenziale esatto *.

* Questo teorema in generale è dato dal BETTI, *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni.* Ann. di Mat., **4**; 1871. Da questo si può agevolmente dedurre il teorema di Stokes. Vedi MAGGI, *Atti Acc. Gioenia di Catania*, **4**; 1892.

CAPITOLO SESTO.

TEOREMI GENERALI SULLE EQUAZIONI DELL'EQUILIBRIO DEI CORPI ISOTROPI. METODO DI INTEGRAZIONE DEL BETTI *.

§ 1. **Espressioni degli spostamenti.** — Riprendiamo per maggior chiarezza le equazioni indefinite per l'equilibrio trovate al Cap. 4.° Le equazioni indefinite sono:

$$X + (\Omega^2 - \omega^2) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \omega^2 \Delta_2 u = 0 \qquad (1)$$

e due analoghe: oppure

$$X + \Omega^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \omega^2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{\partial T_3}{\partial y} \right) = 0, \text{ ecc.} \qquad (1')$$

* Su questo capitolo vedi sopratutto la memoria capitale del Betti, *Teor. d. elasticità*, già citata: le *Ricerche sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi* del prof. Cerruti, *Memorie Acc. d. Lincei*, **13**; 1882. Cesàro, libr. già citato, pag. 100 e seguenti. Love, libr. citato, Cap. viii, Vol. i.

Le equazioni ai limiti sono:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}L+2\omega^2\frac{du}{dn}+(\Omega^2-2\omega^2)\,\Theta\frac{dx}{dn}+\\&+\omega^2\left(T_3\frac{dy}{dn}-T_2\frac{dz}{dn}\right)=0,\ \text{ecc.};\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

oppure:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}L+\omega^2\frac{du}{dn}+(\Omega^2-\omega^2)\,\Theta\frac{dx}{dn}+\\&+\omega^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dx}{dn}\right)+\\&+\omega^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dz}{dn}-\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dx}{dn}\right)=0,\ \text{ecc.}\end{aligned}\right\}\quad(2')$$

Il problema che si tratta di risolvere è il seguente:
un corpo isotropo soggetto a forze di massa è deformato per mezzo di trazioni date sulla superficie del corpo; si vuole determinare la deformazione, determinare cioè per ogni punto del corpo le componenti u, v, w dello spostamento.

Un altro caso notevole, ma fisicamente meno importante, è quello in cui in superficie si conoscono gli spostamenti; oppure potremmo supporre di conoscere su di una parte della superficie limite le forze e sull'altra gli spostamenti; oppure parte delle forze e degli spostamenti, ecc.

Il problema consiste nella integrazione delle equazioni differenziali (1), subordinatamente alle condizioni (2) valide in superficie se ivi sono note

le trazioni superficiali: se poi sono assegnati gli spostamenti, le funzioni u, v, w debbono sempre soddisfare le (1) e ridursi in superficie a funzioni note arbitrariamente date, ecc.

Tal problema, come abbiamo già dimostrato, è completamente determinato dalle condizioni precedenti, a meno di un moto di corpo rigido.

Valendoci ora delle (1) e (2) possiamo trovare in un punto qualunque del corpo le espressioni degli spostamenti in funzione delle forze, della dilatazione cubica e degli spostamenti in superficie.

Infatti per la formula di Green (Cap. 1, for. 10') si ha:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u(x_1, y_1, z_1) = \int \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn} \right) d\sigma - \\ - \int \frac{1}{r} \Delta_2 u \, dS \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

in cui (x_1, y_1, z_1) è un punto arbitrario, ma fisso nell'interno del corpo, nel quale si vogliono calcolare le componenti di spostamento; r è la distanza variabile del punto suddetto da un altro punto qualunque x, y, z variabile e nell'interno e alla superficie del corpo.

Moltiplichiamo la (1) per $\frac{1}{r}$ ed integriamo a tutto lo spazio occupato dal corpo; otterremo:

$$\int \frac{X}{r} dS + (\Omega^2 - a^2) \int \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial x} dS + \omega^2 \int \frac{1}{r} \Delta_2 u \, dS = 0.$$

Ora osserviamo che:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Theta}{r}\right)-\Theta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Theta}{r}\right)+\Theta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Theta}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\Theta}{r}\right),$$

e ciò perchè è:

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1},$$

e perchè Θ, dilatazione nel punto generico x, y, z, è certamente indipendente da x_1, y_1, z_1. Applicando poscia il lemma di Gauss si ha:

$$\int\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial x}dS=-\int\Theta\frac{dx}{dn}\frac{d\sigma}{r}+\frac{\partial}{\partial x_1}\int\frac{\Theta}{r}dS.$$

Dunque:

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{X}{r}dS+(\Omega^2-\omega^2)\frac{\partial}{\partial x_1}\int\frac{\Theta}{r}dS-\\&-(\Omega^2-\omega^2)\int\Theta\frac{dx}{dn}\frac{d\sigma}{r}+\omega^2\int\frac{\Delta_2 u}{r}dS=0.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Parimenti moltiplichiamo la (2′) per $\frac{1}{r}$ ed integriamo a tutta la superficie del corpo; si ha:

$$\frac{1}{\rho}\int L\frac{d\sigma}{r}+\omega^2\int\frac{du}{dn}\frac{d\sigma}{r}+(\Omega^2-\omega^2)\int\Theta\frac{dx}{dn}\frac{d\sigma}{r}+$$
$$+\omega^2\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dx}{dn}\right)\frac{d\sigma}{r}+$$
$$+\omega^2\int\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dz}{dn}-\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dx}{dn}\right)\frac{d\sigma}{r}=0.$$

Qui occorre osservare la seguente identità

$$\left.\begin{aligned}&\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{d y}{d n}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{d x}{d n}\right)\frac{d\sigma}{r}+\\&+\int v\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{d y}{d n}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{d x}{d n}\right)d\sigma=0,\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

la quale permette di eliminare le derivate degli spostamenti in superficie.

Infatti se $\bar{\sigma}$ è l'insieme di σ e della superficie sferica σ_1 di raggio r e di centro M_1, che limita lo spazio S_1 contenuto in S, si ha:

$$\int\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{r}\right)\frac{d y}{d n}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{r}\right)\frac{d x}{d n}\right\}d\bar{\sigma}=$$

$$=\int\left\{\frac{\partial^2\left(\frac{v}{r}\right)}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2\left(\frac{v}{r}\right)}{\partial y\,\partial x}\right\}d S_1=0$$

sempre in virtù del lemma di Gauss. Ma la parte dell'integrale del primo membro relativa a σ_1 è

$$\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{d y}{d r}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{d x}{d r}\right)\frac{d\sigma_1}{r}-$$

$$-\int\frac{v}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial r}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial r}\right)d\sigma_1;$$

il secondo integrale è identicamente nullo; il primo tende a zero col tendere a zero di r; è dunque nullo l'integrale esteso a σ; e quindi è vera la (5).

Osserviamo ancora un'altra utile trasformazione:

$$\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)dS=$$

$$=\int\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{1}{r}\right)\right\}dS=$$

$$=-\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dx}{dn}\right)\frac{d\sigma}{r}.$$

Quindi per la (5) risulta

$$\left.\begin{aligned}&\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)dS=\\&=\int v\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dx}{dn}\right)d\sigma.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

La stessa identità (5) vale per w. Mediante queste due identità i due ultimi integrali della primitiva eguaglianza, prescindendo da ω^2, si trasformano in questi

$$-\int v\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dx}{dn}\right)d\sigma;$$

$$-\int w\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dz}{dn}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dx}{dn}\right)d\sigma;$$

od anche in questi altri:

$$-\int\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\sigma+$$

$$+\int\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\frac{dx}{dn}d\sigma.$$

Se quindi poniamo

$$\left.\begin{aligned} s_n &= u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn} \\ R &= u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}, \end{aligned}\right\}\quad(7)$$

s_n rappresenterà la componente normale dello spostamento in superficie, ed avremo

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\int L\frac{d\sigma}{r}+\omega^2\int\frac{du}{dn}\frac{d\sigma}{r}+ \\ &+(\Omega^2-\omega^2)\int\Theta\frac{dx}{dn}\frac{d\sigma}{r}+\omega^2\frac{\partial}{\partial x_1}\int s_n\frac{d\sigma}{r}+ \\ &+\omega^2\int R\frac{dx}{dn}d\sigma=0; \end{aligned}\right\}\quad(8)$$

perchè ancor qui si noterà che

$$s_n\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}=-s_n\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{s_n}{r}\right).$$

Moltiplicando ora la (3) per ω^2 e sommando a secondo membro le (4) ed (8), otterremo

$$4\pi\omega^2 u(x_1, y_1, z_1) =$$

$$= \int X \frac{dS}{r} + \frac{1}{\rho}\int L \frac{d\sigma}{r} + \omega^2 \int u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma +$$

$$+ \omega^2 \int R \frac{dx}{dn} d\sigma + (\Omega^2 - \omega^2) \frac{\partial}{\partial x_1} \int \Theta \frac{dS}{r} +$$

$$+ \omega^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \int s_n \frac{d\sigma}{r}.$$

Formule analoghe si otterranno per v e w; per porle sotto la forma più conveniente converrà usare alcune abbreviazioni.

Poniamo

$$W = \int \Theta \frac{dS}{r}; \quad V = \int s_n \frac{d\sigma}{r}. \tag{9}$$

W è il valore in (x_1, y_1, z_1) della funzione potenziale di una distribuzione di materia fatta in S colla densità Θ; V è il valore nello stesso punto della funzione potenziale di uno strato semplice deposto su σ colla densità s_n. Quindi pei teoremi di Laplace e di Poisson (Cap. 2°, form. 11), nel punto (x_1, y_1, z_1) avremo:

$$\Delta_2 W = -4\pi\Theta(x_1, y_1, z_1); \quad \Delta_2 V = 0. \tag{10}$$

Poniamo ancora:

$$\left.\begin{aligned}
A &= \int X \frac{dS}{r} + \frac{1}{\rho}\int L \frac{d\sigma}{r} + \omega^2 \int u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma + \\
&\qquad + \omega^2 \int R \frac{dx}{dn} d\sigma \\
B &= \int Y \frac{dS}{r} + \frac{1}{\rho}\int M \frac{d\sigma}{r} + \omega^2 \int v \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma + \\
&\qquad + \omega^2 \int R \frac{dy}{dn} d\sigma \\
C &= \int Z \frac{dS}{r} + \frac{1}{\rho}\int N \frac{d\sigma}{r} + \omega^2 \int w \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma + \\
&\qquad + \omega^2 \int R \frac{dz}{dn} d\sigma.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Otterremo le formule seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
4\pi\omega^2 u &= A + (\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial W}{\partial x_1} + \omega^2 \frac{\partial V}{\partial x_1} \\
4\pi\omega^2 v &= B + (\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial W}{\partial y_1} + \omega^2 \frac{\partial V}{\partial y_1} \\
4\pi\omega^2 w &= C + (\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial W}{\partial z_1} + \omega^2 \frac{\partial V}{\partial z_1},
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

che appunto volevamo stabilire e che sono dovute al Betti *. Esse, come vedremo nei successivi pa-

* *Teor. d. elasticità*, § 8, 9.

ragrafi, sono di grandissima importanza per tutta la teoria generale; ma non ci permettono ancora di assegnare in un punto del corpo gli spostamenti in funzione delle sole forze e dei soli spostamenti in superficie. Infatti in W comparisce ancora Θ che è incognita.

§ **2. Dilatazione cubica e componenti delle rotazioni.** — Deriviamo le (12) rispetto x_1, y_1, z_1 e poi sommiamo:

$$4\pi\omega^2\Theta(x_1, y_1, z_1) = \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial y_1} + \frac{\partial C}{\partial z_1} + \\ + (\Omega^2 - \omega^2)\,\Delta_2 W + \omega^2 \Delta_2 V$$

e per le (10):

$$4\pi\Omega^2\Theta = \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial y_1} + \frac{\partial C}{\partial z_1}. \tag{13}$$

Sempre dalle (12) ricaviamo pure:

$$4\pi\omega^2 T_1 = \frac{\partial C}{\partial y_1} - \frac{\partial B}{\partial z_1}, \text{ ecc.} \tag{14}$$

Sviluppiamo ora la (13); bisogna derivare le (11). Osserviamo a tal uopo che:

$$\sum \frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{dx}{dn} =$$

$$= \sum u \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial x_1}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y_1}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z_1}\frac{dz}{dn} \right)$$

$$= \sum u \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1\, \partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1\, \partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1\, \partial z}\frac{dz}{dn} \right)$$

poichè, com'è facile verificare, si ha:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial y_1} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1 \, \partial y}, \text{ ecc.}$$

Il coefficiente di u nella precedente sommatoria equivale a:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{d \frac{1}{r}}{d n} = \frac{d}{d n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}$$

come si verifica subito. Abbiamo dunque:

$$\left.\begin{aligned} 4 \pi \Omega^2 \Theta = \sum \int X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} d S + \sum \frac{1}{\rho} \int L \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} d \sigma + \\ + 2 \omega^2 \sum \int u \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{d \frac{1}{r}}{d n} d \sigma ; \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

e questa ci fa conoscere la dilatazione nel punto x_1, y_1, z_1 in funzione delle forze di massa, delle trazioni e degli spostamenti in superficie *.

§ **3. Espressioni degli spostamenti in funzione delle forze e degli spostamenti in superficie.** — Si può stabilire per il sistema (1) un teorema analogo a quello di Green per l'equazione $\Delta_2 u = f$? Volendo estendere il metodo del § 7, Cap. 1°, oc-

* Betti, l. c.

corre assegnare degli integrali particolari che facciano per le (1) lo stesso ufficio dell'integrale $1:r$ per l'equazione di Laplace; cioè degli integrali omogenei di grado -1 col solo punto singolare $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a distanza finita.

Si possono assegnare infinite soluzioni particolari del sistema (1), essendo nulle le forze di massa. Infatti scriviamolo così:

$$(\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \omega^2 \Delta_2 \xi = 0, \text{ ecc.} \qquad (1'')$$

Siano F, G, H tre soluzioni distinte della

$$\Delta_4 = 0$$

cui soddisfano le ξ, η, ζ. Dico che potremo porre

$$\xi = \alpha \frac{\partial T}{\partial x} + \Delta_2 F, \eta = \alpha \frac{\partial T}{\partial y} + \Delta_2 G,$$

$$\zeta = \alpha \frac{\partial T}{\partial z} + \Delta_2 H,$$

dove

$$T = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Supponendo infatti α costante ed eguale a

$$(-\Omega^2 + \omega^2) : \Omega^2,$$

si soddisfa alle (1'').

Se F, G, H sono omogenee di grado n, le ξ, η, ζ saranno omogenee di grado $n-2$. Ora noi conosciamo un integrale della $\Delta_4 = 0$, omogeneo di primo grado, cioè r (Cap. 1°, § 2): ponendo

$F = r$, $G = H = 0$ otterremo i seguenti integrali delle (1″) algebrici, omogenei di grado -1 e col solo punto singolare P_1 a distanza finita,

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= + \alpha \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{2}{r}; \\ \eta_1 &= + \alpha \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}; \zeta_1 = + \alpha \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Con permutazioni circolari dedurremo da queste altre due soluzioni $\xi_2, \ldots; \xi_3, \ldots$ colle stesse proprietà. La dilatazione cubica e i doppî delle rotazioni corrispondenti a questa ipotetica deformazione hanno quindi i valori

$$\vartheta = \frac{2\omega^2}{\Omega^2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \tau_1 = 0, \tau_2 = 2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \tau_3 = -2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}.$$

Valendoci delle equazioni ai limiti (2) potremo assegnare le forze L_1, M_1, N_1 da applicare in superficie perchè la deformazione corrispondente abbia per componenti le (16); e si trova

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= A_{xx} - 2\rho\omega^2 \frac{d \frac{1}{r}}{d n}, \\ M_1 &= A_{xy} - 2\rho\omega^2 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{d x}{d n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{d y}{d n} \right) \\ N_1 &= A_{xz} - 2\rho\omega^2 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{d x}{d n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{d z}{d n} \right) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

dove

$$A_{uv} = \frac{2\rho\omega^2(\Omega^2-\omega^2)}{\Omega^2}\left\{\frac{d}{dn}\frac{\partial^2 r}{\partial u\partial v} - 2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial u}\frac{du}{dn}\right\}. \quad (17')$$

Queste espressioni, lineari rispetto ai coseni della normale, sono omogenee di grado -2. Dico che

$$\int L_1\, d\sigma_1 = 8\rho\pi\omega^2, \int M_1\, d\sigma_1 = \int N_1\, d\sigma_1 = 0,$$

σ_1 essendo una sfera di raggio r avente per centro il punto P, ed $n = r$. Infatti i termini $A_{xx}, \ldots$ a meno di un fattore, si riducono rispettivamente a

$$\frac{2x^2-y^2-z^2}{r^4}, \quad \frac{3xy}{r^4}, \quad \frac{3xz}{r^4},$$

e i loro integrali estesi a σ_1 sono evidentemente nulli; mentre i coefficienti di $2\rho\omega^2$ sono:

$$\frac{1}{r^2}, \quad 0, \quad 0;$$

quindi è vero l'asserto.

Sarebbe ora facile dimostrare che le stesse valgono qualunque sia σ_1, purchè racchiudente il punto P_1 e riducibile ad una superficie sferica per deformazione continua.

Escludiamo da S il punto P_1 racchiudendolo entro una sfera σ_1, contenuta in S; sia S_1 lo spazio restante e a questo, e ai due sistemi di forze

$$X,\ Y,\ Z;\ L,\ M,\ N \text{ ed } L_1,\ M_1,\ N_1$$

p.199

applichiamo il teorema del Betti. Si ha

$$\rho \int (X \xi_1 + \ldots) d S_1 + \int (L \xi_1 + \ldots) d \sigma =$$
$$= \int (L_1 u + \ldots) d \sigma + \int (L_1 u + \ldots) d \sigma_1.$$

Facciamo impiccolire indefinitamente la sfera σ_1; poichè ξ_1, η_1, ζ_1 diventano in P_1 infinite come $\frac{1}{r}$, il primo integrale, sempre finito, ha per limite l'integrale esteso allo spazio S.

Passiamo al quarto; detta $\bar{\omega}$ la superficie sferica unitaria, L'_1 il valore che prende L_1 su questa, poichè

$$L'_1 = r^2 L_1, \quad d \sigma_1 = r^2 d \bar{\omega}$$

risulta

$$\int L_1 u \, d \sigma_1 = \int L'_1 u \, d \bar{\omega};$$

quindi, con un noto procedimento, se u_1 è il valore di u in P_1, si ha

$$\lim_{r=0} \int L_1 u \, d \sigma_1 = u_1 \int L'_1 \, d \bar{\omega} = u_1 \int L_1 \, d \sigma_1.$$

Il quarto integrale ha per limite $8 \rho \pi \omega^2 u_1$ e però

$$\left.\begin{aligned} 8 \rho \pi \omega^2 u_1 = \rho \int (X \xi_1 + \ldots) d S + \\ + \int (L \xi_1 - L_1 u + \ldots) d \sigma, \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

e due formule analoghe per v_1 e w_1 in cui $\xi_1, \ldots, L_1, \ldots$ hanno i valori (16) e (17) e quelli che si deducono da questi con permutazioni circolari.

Queste formule fanno dipendere i valori degli

spostamenti in un punto del corpo dalle forze e dagli spostamenti al contorno e costituiscono per le (1) ciò che il teorema di Green è per le funzioni armoniche. In esse compariscono integrali che possono interpretarsi come funzioni potenziali di spazio, di strato semplice e doppio strato.

Collo stesso procedimento si può dimostrare che se il punto P_1 è su σ in un punto ordinario, nelle (18) occorre sostituire 8π con 4π; nel caso poi che P_1 sia esterno, il secondo membro è nullo.

Diremo in seguito del significato fisico dei vari termini della (18); osserviamo qui solamente, che gli integrali di volume possono interpretarsi come componenti di una deformazione prodotta in un corpo isotropo indefinitamente esteso da forze (X, Y, Z) che sollecitano gli elementi contenuti entro S, supponendo nulla la deformazione all'infinito *.

§ 4. Risoluzione del problema dell'equilibrio elastico, cogniti gli spostamenti in superficie. — Allo stesso modo che la determinazione di una funzione armonica in un certo spazio, allorchè sono noti i valori che essa assume al contorno, dipende dalla determinazione della funzione di Green (Cap. 1°, § 9), cioè di una funzione armonica che in superficie assume valori speciali; così la determinazione delle tre funzioni u, v, w che soddisfano le equa-

* Le form. (18) sono dovute al prof. SOMIGLIANA: *Ann. d. Matem.* **17**; 1889, *Rend. Ist. Lombardo*, **23**, 1890 e *Nuov. Cim.* **36**; 1894. Su questo argomento vedi ancora la tesi del prof. LAURICELLA: *Equilibrio dei corpi elastici isotropi;* Annali della R. Scuola Normale di Pisa. 1894. Cap. 3.°

zioni dell'equilibrio ed in superficie assumono valori dati ad arbitrio, dipende dalla conoscenza di una speciale deformazione, che ora definiremo.

Siano ξ, η, ζ le componenti di spostamento corrispondenti a forze di massa nulle e a forze agenti in superficie e di componenti L_0, M_0, N_0.

Il teorema di reciprocità del Betti ci dà:

$$\Sigma\int X\xi\, d\,S + \frac{1}{\rho}\Sigma\int L\xi\, d\sigma - \frac{1}{\rho}\Sigma\int L_0\, u\, d\sigma = 0.$$

Sottragghiamo questa equazione dalla (15) ed otterremo:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\Omega^2\Theta(x_1, y_1, z_1) = \Sigma\int X\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1} - \xi\right) d\,S + \\ + \frac{1}{\rho}\Sigma\int L\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1} - \xi\right) d\sigma + \\ + \Sigma\int\left(\frac{L_0}{\rho} + 2\,\omega^2\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{d\frac{1}{r}}{d\,n}\right) u\, d\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Volendo dunque determinare la dilatazione cubica, bisogna cercare di eliminare da questa equazione le L, M, N che sono incognite, perchè sopra σ si conoscono soltanto i valori di u, v, w.

Consideriamo a tal uopo una speciale deformazione ausiliaria corrispondente a forze di massa nulle e tale che le componenti di spostamento in

superficie assumano valori dati da:

$$\xi = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}, \quad \eta = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}, \quad \zeta = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}. \tag{20}$$

Questo problema, analogo a quello della ricerca della funzione di Green, è certamente più semplice del problema della determinazione della deformazione effettiva; ma non si può dare nessun metodo per la sua soluzione. Notiamo che occorrerà determinare il valore di ξ, η, ζ in un punto generico x, y, z; perchè nelle (20) il punto x_1, y_1, z_1 figura come polo fisso. Per conoscere a loro volta queste tre funzioni ξ, η, ζ, basterà che, con qualche particolare artifizio, si giunga a determinare la dilatazione cubica ϑ corrispondente; supposta infatti cognita ϑ, dalle equazioni:

$$(\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \omega^2 \Delta_2 \xi = 0, \text{ ecc.}$$

ricaveremo:

$$\Delta_2 \xi = f(x, y, z),$$

essendo f una funzione nota di x, y, z; allora siamo ricondotti al problema della determinazione di una funzione ξ regolare in S che soddisfa l'equazione precedente e i cui valori in superficie sono dati dalle (20); problema che si sa risolvere (Cap. 1°, pag. 27) se si sa assegnare, per lo spazio S, la funzione di Green.

Cognita dunque in un modo qualunque la deformazione ausiliaria, le equazioni (2) ci permette-

ranno di calcolare le forze L_0, M_0, N_0 da applicare in superficie perchè la deformazione risultante sia quella di componenti ξ, η, ζ. La formula (19) allora, dalla quale in virtù delle (20) sono scomparse le L, M, N, farà conoscere la dilatazione cubica, nel punto x_1, y_1, z_1, della effettiva deformazione.

Finalmente la ricerca delle componenti u, v, w, esige ancora la integrazione delle:

$$X + (\Omega^2 - \omega^2) \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} + \omega^2 \Delta_2 u = 0, \text{ ecc.};$$

le quali, essendo già nota Θ, sono della forma:

$$\Delta_2 u = f(x_1, y_1, z_1), \text{ ecc.}$$

mentre in superficie sono noti, perchè dati, i valori di u, v, w.

Siamo quindi ricondotti ad un altro problema da riguardarsi come risoluto. La vera difficoltà del metodo, come si vede, consiste nella ricerca della deformazione ausiliaria, oppure della corrispondente dilatazione cubica.

Il metodo precedente è dovuto al Betti; è stato modificato e poscia ridotto alla forma da noi esposta dal prof. Cerruti *. Ne vedremo qualche applicazione nel capitolo seguente. Esso consta dunque di tre parti.

1.° *Determinazione della deformazione ausiliaria, od anche della sola dilatazione cubica ausiliaria.*

---

* Vedi le già citate *Ricerche*, p. 86, Cap. 1.°

2.° *Ricerca delle forze superficiali corrispondenti alla deformazione ausiliaria.*

3.° *Determinazione della dilatazione cubica effettiva mediante la* (19), *e degli spostamenti effettivi.*

Cognita la deformazione ausiliaria; supposto di saper risolvere il problema dei valori al contorno per lo spazio S, i calcoli relativi alla seconda e terza parte non presentano difficoltà.

§ **5. Risoluzione del problema dell'equilibrio elastico, cognite le trazioni superficiali.** — Si può anzitutto mostrare che se in superficie sono note le L, M, N la determinazione della dilatazione cubica dipende dalla ricerca di una speciale deformazione ausiliaria.

Consideriamo infatti quella deformazione di componenti ξ, η, ζ corrispondente a forze di massa nulle e a forze agenti in superficie e di componenti

$$\left.\begin{aligned} L_0 = -2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}, \quad M_0 = -2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}, \\ N_0 = -2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Per la ricerca di questa deformazione, in generale più semplice di quella che si deve col fatto cercare, non si può assegnare nessun metodo generale. Tale problema ammette una soluzione unica purchè il sistema di forze (21) sia di per sè,

supposto rigido il corpo, in equilibrio. Che tale sistema sia veramente in equilibrio si può provare così.

Infatti derivando rispetto x_1 la (1′) del Cap. 1°, potendo effettuare la derivazione sotto il segno integrale, si ha:

$$\int L_0 \, d\sigma = 0, \quad \text{ecc.} \ldots$$

Nella (3′) del Cap. 1°, si faccia $\varphi = y$; avremo

$$\int y \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma + \int \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} dS = 4\pi y_1$$

ed anche:

$$\int y \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \frac{\partial}{\partial y_1} \int \frac{dS}{r} = 4\pi y_1;$$

analogamente:

$$\int z \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \frac{\partial}{\partial z_1} \int \frac{dS}{r} = 4\pi z_1.$$

Derivando la prima rispetto z_1, la seconda rispetto y_1 e sottraendo risulta:

$$\int (y N_0 - z M_0) \, d\sigma = 0, \text{ ecc.} \ldots$$

e però effettivamente le forze L_0, M_0, N_0 costituiscono un sistema di forze in equilibrio.

Ammettiamo determinata questa deformazione ausiliaria; la (19), dalla quale, in virtù delle (21), si elimineranno gli spostamenti in superficie, ci

farà conoscere la dilatazione cubica Θ corrispondente alla deformazione effettiva.

Ma mentre nel caso del § precedente si poteva, dopo ciò, ritenere come risoluto il problema, o meglio ridotto al problema dei valori al contorno, in questo caso si presenta invece una grave difficoltà. Infatti essendo cognita la dilatazione, la prima delle equazioni indefinite dell' equilibrio, come più volte si è visto, si riduce alla

$$\Delta_2 u = f(x_1, y_1, z_1);$$

ma dalle equazioni ai limiti non è possibile ora conoscere nè i valori di u, nè quelli di $\frac{du}{dn}$; poichè la prima delle (2') contiene i valori delle derivate di v e w in superficie.

Riflettendo alle (2), se in qualche modo potessimo procurarci i valori dei doppî delle rotazioni in superficie, conosceremmo i valori di $\frac{du}{dn}$ e quindi la ricerca di u dipenderebbe da uno dei soliti problemi (Cap. 1°, pag. 30).

Ma qui ha luogo la seguente favorevole circostanza:

cognita la dilatazione Θ, le componenti della rotazione sono determinate a meno di una funzione armonica.

Poniamo infatti, per compendio,

$$\left.\begin{aligned} X + \Omega^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} = \omega^2 P; \quad Y + \Omega^2 \frac{\partial \Theta}{\partial y_1} = \omega^2 Q; \\ Z + \Omega^2 \frac{\partial \Theta}{\partial z_1} = \omega^2 R \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

P, Q, R essendo funzioni note di x_1, y_1, z_1. Le equazioni (1') diventano

$$P = \frac{\partial T_3}{\partial y_1} - \frac{\partial T_2}{\partial z_1}; \ldots \tag{23}$$

di guisa che

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial y_1} + \frac{\partial R}{\partial z_1} = 0, \tag{24}$$

come del pari

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial y_1} + \frac{\partial T_3}{\partial z_1} = 0.$$

Determiniamo una funzione ψ armonica in S e tale che su σ sia

$$\frac{d\psi}{dn} = \Sigma P \frac{dx}{dn}. \tag{25}$$

Ciò è possibile perchè

$$\int \frac{d\psi}{dn} d\sigma = -\Sigma \int \frac{\partial P}{\partial x_1} dS = 0.$$

Tale funzione è determinata a meno di una costante: noi quindi la supporremo nota.

Decomponiamo quindi P, Q, R in questo modo

$$P = P_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \; Q = Q_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \; R = R_1 + \frac{\partial \psi}{\partial z_1} \tag{26}$$

le P_1, Q_1, R_1 risulteranno perfettamente determi-

nate e inoltre

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_1}{\partial y_1}+\frac{\partial R_1}{\partial z_1}=0. \tag{27}$$

Per trovare $T_1, \ldots$ poniamo

$$\left.\begin{aligned} T_1&=\frac{\partial H}{\partial y_1}-\frac{\partial G}{\partial z_1}+T'_1\\ T_2&=\frac{\partial F}{\partial z_1}-\frac{\partial H}{\partial x_1}+T'_2\\ T_3&=\frac{\partial G}{\partial x_1}-\frac{\partial F}{\partial y_1}+T'_3 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

essendo F, G, H, $T_1', \ldots$ delle altre funzioni incognite, da determinarsi in modo opportuno e colla condizione

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial G}{\partial y_1}+\frac{\partial H}{\partial z_1}=0. \tag{29}$$

La prima delle (23) diventa:

$$P_1+\frac{\partial \psi}{\partial x_1}=-\Delta_2 F+\frac{\partial T_3'}{\partial y_1}-\frac{\partial T_2'}{\partial z_1}$$

e a questa possiamo soddisfare ponendo anzitutto

$$\Delta_2 F=-P_1.$$

Siccome non ci occorre che un valor particolare per F, G, H, così possiamo prendere:

$$F=\frac{1}{4\pi}\int\frac{P_1\,dS}{r},\quad G=\frac{1}{4\pi}\int\frac{Q_1\,dS}{r},$$

$$H=\frac{1}{4\pi}\int\frac{R_1\,dS}{r},$$

con ciò la (29) è soddisfatta; e dopo ciò i valori

T_1' ... soddisfano le

$$\frac{\partial T_3'}{\partial y_1} - \frac{\partial T_2'}{\partial z_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}; \text{ ecc....} \tag{30}$$

La ricerca di T_1', T_2', T_3' si fa agevolmente approfittando di una forma notevole delle derivate di ψ.

La funzione ψ è definita per tutti i punti interni ad S ed al contorno σ; immaginiamo un'altra funzione ψ_1 definita in tutto lo spazio esterno ad S (nel quale è armonica) che soddisfi alle condizioni di convergenza all'infinito (Cap. 1°, § 12) e sopra σ sia

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{d\psi_1}{dn}, \tag{31}$$

di guisa che ψ_1 potrà considerarsi come la continuazione della ψ nello spazio esterno ad S. La ψ così continuata è, in generale, discontinua sopra σ; sia, per ogni punto x, y, z di σ,

$$\psi - \psi_1 = 4\pi\varphi$$

φ essendo una funzione definita pei soli punti di σ. Ora il punto x_1, y_1, z_1 è interno ad S; e però il teorema di Green applicato alla ψ (Cap. 1°, form. 10') ed il lemma di Green applicato alla ψ_1 ed alla $1:r$ allo spazio esterno ad S (Cap. 1°, form. 6) ci danno

$$4\pi\psi(x_1, y_1, z_1) = \int\left(\psi\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dn}\right)d\sigma;$$

$$0 = \int\left(\psi_1\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{d\psi_1}{dn}\right)d\sigma$$

e quindi sottraendo

$$\psi(x_1, y_1, z_1) = \int \varphi \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma;$$

l'integrale a secondo membro esprime il valore di una funzione potenziale di un doppio strato deposto su σ colla densità φ.

Ma:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \Sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dx}{dn} = -\Sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} \frac{dx}{dn},$$

quindi posto

$$\alpha = \int \varphi \frac{dx}{dn} \frac{d\sigma}{r}; \quad \beta = \int \varphi \frac{dy}{dn} \frac{d\sigma}{r}; \quad \gamma = \int \varphi \frac{dz}{dn} \frac{d\sigma}{r} \quad (32)$$

risulterà

$$\psi = -\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial \beta}{\partial y_1} - \frac{\partial \gamma}{\partial z_1}.$$

Le α, β, γ sono a loro volta funzioni potenziali di strati semplici deposti su σ con densità rispettive $\varphi \frac{dx}{dn}, \ldots$ Di guisa che nel punto x_1, y_1, z_1

$$\Delta_2 \alpha = \Delta_2 \beta = \Delta_2 \gamma = 0.$$

Di qui

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1 \partial z_1} =$$

$$= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1 \partial z_1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y_1} - \frac{\partial \beta}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial z_1}\right), \text{ ecc.}\ldots$$

Paragonando queste espressioni colle (30) risulta

$$T_1' = \frac{\partial E}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta}{\partial z_1} - \frac{\partial \gamma}{\partial y_1}$$

e due equazioni analoghe, in cui E è una nuova funzione incognita che soddisfa la $\Delta_2 = 0$. Fatte le sostituzioni, trasformati colla (6) del § 1 gl'integrali di volume contenenti Θ e ψ in integrali estesi al contorno, si ha

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\omega^2 T_1 = 4\pi\omega^2 \frac{\partial E}{\partial x_1} + \int \left(Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dS - \\ - \int (\Omega^2 \Theta - \omega^2 \psi_1) \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{dy}{dn} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dz}{dn} \right) d\sigma, \text{ ecc.} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Determinata quindi la dilatazione cubica Θ e le P, Q, R si cercheranno le due funzioni ψ e ψ_1 e poscia le α, β, γ; e le $T_1, \ldots$ oppure le $T_1', \ldots$ resteranno determinate, come avevamo asserito, a meno di una funzione armonica. E questa nei varî casi particolari dovrà determinarsi con speciali artifici. Cognite le rotazioni, le equazioni (2) ci faranno conoscere il valore di $\frac{du}{dn}$ in superficie e quindi la ricerca di u è ricondotta ad uno dei soliti problemi dei valori al contorno.

Riepilogando adunque occorre:

1.° Determinare la deformazione ausiliaria di componenti ξ, η, ζ; e per questo occorre determi-

disfare alle equazioni indefinite per l'equilibrio nell'ipotesi di forze nulle; cioè alle equazioni

$$(\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} + \omega^2 \Delta_2 u_1 = 0, \text{ ecc.}$$

essendo Θ_1 quella parte della dilatazione cubica che si riferisce agli spostamenti u_1, v_1, w_1. Con ciò le equazioni (1) diventano

$$X + \omega^2 \Delta_4 U +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \Delta_2 \left[(\Omega^2 - \omega^2)\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) - \Omega^2 R \right] = 0$$

e due analoghe.

Determiniamo le $U, \ldots$ in modo che sia

$$X + \omega^2 \Delta_4 U = 0, \text{ ecc.}$$

Tenendo presente che a noi occorre solo una soluzione particolare, potremo porre

$$\Delta_2 U = \frac{1}{4\pi\omega^2} \int X \frac{dS}{r}$$

e quindi

$$U = \frac{1}{8\pi\omega^2} \int X r \, dS, \text{ ecc.}$$

perchè è

$$\Delta_2 r = \frac{2}{r}.$$

Ciò posto risulteranno nulle le derivate rispetto

x, y, z di

$$\Delta_2 \left\{ (\Omega^2 - \omega^2) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \ldots \right) - \Omega^2 R \right\};$$

tale funzione dunque è costante e poichè nelle (36) figurano le sole derivate di R possiamo supporre nulla tale costante; la funzione

$$(\Omega^2 - \omega^2) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \ldots \right) - \Omega^2 R$$

è quindi armonica ed eguale ad E; immaginandola compenetrata nelle funzioni ancora incognite $u_1, \ldots$, possiamo assumere senz'altro

$$(\Omega^2 - \omega^2) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \ldots \right) - \Omega^2 R = 0,$$

e questa ci determinerà R. Il problema della ricerca di u, v, w è con ciò ridotto a quello della determinazione di u_1, v_1, w_1 alle quali corrispondono forze di massa nulle *.

Diciamo u', v', w' le altre parti componenti di u, v, w. Se in superficie sono noti gli spostamenti, i valori di u_1, v_1, w_1 saranno pur noti in superficie ed eguali a $u - u'$, ecc....

Se invece in superficie sono note le forze, è subito visto che u_1, v_1, w_1 soddisfano ivi ad equazioni del tutto analoghe alle (2) o alle (2') ma in cui L, M, N verranno soltanto alterate di quantità note.

---

* Betti, l. c., § 5. Cesàro, l. c., pag. 91. Lauricella, l. c., pag. 42.

§ 8. Teorema del prof. Cerruti. — I metodi generali esposti nei §§ precedenti ricevono, nei vari casi particolari, notevoli semplificazioni. Un teorema che permette molte volte raggiungere più direttamente lo scopo, quando si vogliano condurre a termine le integrazioni, è appunto oggetto del seguente §.

La determinazione della dilatazione cubica dipende dalla integrazione della equazione (24), Cap. 4.° Se Θ_1 è una sua soluzione particolare, che può sempre determinarsi, il valore generale di Θ differisce da Θ_1 per una funzione armonica G.

Per mezzo delle (33) potremo inoltre trovare, espressa per G e per E, una soluzione del sistema (23) e (24), che accenneremo con τ_1, τ_2, τ_3. Nelle stesse (33) poniamo $\Theta = 0$ e al posto di X, Y, Z sostituiamo rispettivamente $-\omega^2 \tau_1$, ecc. Diciamo: u_0, v_0, w_0 i valori che così ricaviamo e che forniranno quindi una soluzione particolare del sistema

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial v_0}{\partial y_1} + \frac{\partial w_0}{\partial z_1} = 0$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial y_1} - \frac{\partial v_0}{\partial z_1} = T_1, \text{ ecc.};$$

φ una funzione armonica arbitraria; ψ una soluzione particolare della

$$\Delta_2 \psi = \Theta - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} - \frac{\partial v_0}{\partial y_1} - \frac{\partial w_0}{\partial z_1}.$$

Ponendo

$$u = u_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \text{ ecc.}$$

otterremo una forma possibile per le componenti di spostamento del corpo elastico isotropo in equibrio e dipendente da tre funzioni armoniche. Dunque:

Le componenti di spostamento di un corpo elastico isotropo si possono sempre esprimere mediante tre sole funzioni armoniche e quindi qualunque problema di equilibrio dipende in sostanza dalla determinazione di tre funzioni armoniche *.

§ 9. Riassunto di alcune recenti ricerche sulle equazioni dell'elasticità. — Abbiamo detto che il teorema del Betti, in generale, e le formule del Somigliana, per i corpi isotropi, costituiscono gli equivalenti del lemma e del teorema di Green per le equazioni dell'elasticità.

I risultati ben noti sulle funzioni armoniche possono ancora estendersi al caso più generale di quelle equazioni?

Alcune ricerche recenti, di cui diamo qui un brevissimo cenno, sono appunto ispirate dal concetto di estendere all'elasticità i risultati acquisiti nello studio di una questione assai più semplice.

Il prof. Lauricella, dopo aver studiate le formule del Somigliana, ha esteso alle equazioni (1), nell'assenza di forze di massa, un importante teorema del prof. Volterra sulle serie di funzioni armoniche **.

---

* Questo teorema, già implicitamente contenuto nelle citate *Ricerche*, mi è stato gentilmente comunicato dal professor Cerruti, il quale ne ha fatte varie notevoli applicazioni ai corpi rotondi, in una memoria ancora inedita.

** LAURICELLA: *Tesi già citata*. Cap. 5.°

Siano U_i, V_i, W_i *soluzioni delle* (1) *in un punto di* S, *la cui superficie è* σ, *che col tendere del punto verso* σ *tendano verso i valori* u_i, v_i, w_i. *Se le serie i cui termini generali sono* $U_i, \ldots$; $u_i, \ldots$ *sono convergenti in ugual grado rispettivamente in* S *e sopra* σ, *ed* $U, \ldots$; $u, \ldots$ *sono le loro somme, allora* U, V, W *soddisfano le* (1) *e col tendere del punto verso* σ, *prendono i valori* u, v, w.

Ciò posto se σ è convessa ed ammette in ogni punto un piano tangente determinato, variabile con continuità col punto di contatto, il metodo della media di Neumann * si può estendere alle (1).

Si possono cioè trovare gli sviluppi in serie convergenti in ugual grado della soluzione delle (1), che col tendere del punto verso σ tendano verso tre funzioni finite e continue date ad arbitrio su σ, risolvendo così per serie il problema del § 4, fatte però le dette ipotesi su σ.

Allo stesso ordine d'idee si ispirano alcune ricerche dei sigg. E. e F. Cosserat ** i quali hanno provato che a una forza in un punto situato all'interno di una sfera, si possono sostituire delle forze sulla superficie, che diano all'esterno lo stesso spostamento; stabilendo cioè l'analoga di una delle proposizioni sulle quali si fonda il metodo del " *balayage* " del Poincaré. Quindi hanno esteso alle (1) il metodo dell'equazione funzionale di Robin ***.

---

* Vedi monografia del SILLA: § 14.

** *Comp. Rend.* (avril 1899; juillet 1901).

*** Vedi la monogr. del SILLA: § 18 e § 19.

Posto

$$\xi = 1 : 1 - 2\varkappa$$

e quindi $\xi > \frac{1}{3}$ e positivo, le equazioni (1) assumono la forma

$$\Delta_2 u + \xi \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0; \text{ ecc.}$$

La univocità della soluzione (per date condizioni al contorno) è quindi dimostrata per $\xi > \frac{1}{3}$. Gli stessi signori E. e F. Cosserat, ispirati dai lavori del Picard e Poincaré, si sono proposti di fare lo studio delle funzioni u, v, w del parametro ξ, supposto che esso possa assumere qualunque valore, anche complesso *.

Ecco alcuni degli interessanti risultati ottenuti.

Nel caso del § 4, supponendo anche non nulle le forze di massa, le u, v, w *sono funzioni analitiche uniformi di* ξ *cogli stessi punti critici reali compresi tra* -1 *e* $-\infty$.

Nel caso della sfera esse hanno i poli semplici $-(2r+1):r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ ed il punto singolare essenziale -2; per un inviluppo sferico i poli sono situati su di un segmento limitato, indipendente dai raggi, e che racchiude nel suo interno un punto singolare essenziale.

---

* *Comp. Rend.* avril 1898; juillet, août 1901. Un riassunto di queste ricerche trovasi alla pag. 528 del 3° Vol. della *Mécan. Ration.* del sig. APPELL.

Nel caso del § 5, se il contorno è sferico, le u, v, w sono funzioni uniformi di ξ cogli stessi punti critici, cioè il punto singolare essenziale 0 e i poli semplici $2r+1 : 2r^2+4r+3$; per un inviluppo sferico il punto singolare è lo stesso e i punti critici sono compresi tra -1 e $\frac{1}{3}$.

In questi due casi e in quello dell'ellissoide a tre assi si ha sempre il polo $\xi = \frac{1}{3}$.

Alcune altre ricerche riguardano le equazioni dei corpi elastici in generale.

Le equazioni generali dell'elasticità sono un caso speciale di un sistema di tre equazioni differenziali del 2° ordine colle derivate delle u_1, u_2, u_3 rispetto x_1, x_2, x_3, a coefficienti costanti; sistema che può scriversi sotto la forma simbolica:

$$\sum_{\mu=1}^{3} \Delta_{\lambda\mu}\, u_\mu = U_\lambda \tag{37}$$

essendo $\Delta_{\lambda\mu}$ simboli di operazioni definiti da

$$\Delta_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

e in cui $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ è un coefficiente costante.

Sotto questa forma sono state oggetto di notevolissime ricerche del sig. I. Fredholm *.

---

* *Sur les équations de l'équilibre d'un corps solide élastique.* Acta Mathematica, **23**, p. 1; 1900.

Si consideri anzitutto il caso di $U\lambda = 0$. La eliminazione di due delle u conduce, in generale, ad una equazione differenziale, lineare, omogenea del sesto ordine a coefficienti costanti, che si può porre sotto forma simbolica di determinante di 3° ordine i cui elementi sono $\Delta_{\lambda\mu}$.

Nel caso della elasticità, se $2\,\Pi$ è il potenziale unitario, funzione quadratica ed omogenea delle componenti di deformazione

$$\delta_{\nu\nu} = \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu}\,;\ \delta_{\lambda\mu} = \delta_{\mu\lambda} = \frac{\partial\, u_\lambda}{\partial\, x_\mu} + \frac{\partial\, u_\mu}{\partial\, x_\lambda}\,,$$

posto

$$\delta_{\nu\nu} = x_\nu\, \xi_\nu\,;\ \delta_{\lambda\mu} = x_\lambda\, \xi_\mu + x_\mu\, \xi_\lambda\,,$$

risulterà

$$2\,\Pi = \sum_{\lambda,\mu} \Delta_{\lambda\mu}\,(\xi_1\, \xi_2\, \xi_3)\, x_\lambda\, x_\mu\,.$$

Il discriminante di questa forma quadratica delle x è precisamente l'equazione risultante del sesto ordine, quando al posto di ξ_μ si sostituisca $\dfrac{\partial}{\partial\, x_\mu}$, ecc.

Il Fredholm è stato quindi condotto a determinare tutti gli integrali analitici, omogenei di grado -1, di una equazione alle derivate parziali di ordine n a cofficienti costanti; poscia ha *espresso mediante integrali definiti le soluzioni del sistema* (37) *omogenee di grado* -1 *ed algebriche e il cui solo punto singolare reale a distanza finita è il punto* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ *e che per i corpi elastici fanno lo stesso ufficio delle* (16) *per i corpi isotropi.*

D'altra parte per questi sistemi sussiste un teorema analogo a quello del Betti. Si osserverà a tal proposito che la dimostrazione di questo teorema (Cap. 5°, § 10) poggia sulla trasformazione di $\int f d S$, in cui f è una speciale funzione bilineare delle componenti di deformazione

$$a, b, \ldots h \text{ ed } a', b', \ldots h';$$

e quindi una particolare funzione bilineare delle nove derivate delle componenti di spostamento. Prendendo per f la più generale funzione bilineare di queste derivate, con coefficienti costanti, si ottiene un teorema analogo a quello del Betti ma per i sistemi (37), cui vanno aggiunte al contorno speciali equazioni che comprendono come caso particolare quelle ai limiti del corpo elastico.

Allora applicando lo stesso procedimento del § 3 si deducono, pei corpi cristallini qualunque, le formule del Somigliana, e che possono perciò studiarsi in modo analogo a quello seguito pei corpi isotropi. I due problemi fondamentali dei § 4 e 5 si possono, anche per i corpi cristallini, ridurre alla ricerca di due speciali deformazioni ausiliarie.

I termini che nelle formule del Somigliana generalizzate dipendono da integrali di volume, rappresentano le componenti di spostamento di un corpo elastico indefinito in tutti i sensi e soggetto a forze di massa agenti sugli elementi interni al volume S, supponendo nulla la deformazione all'infinito (*Deformazione del 1° tipo* del professore Gebbia).

Il prof. Gebbia è giunto indipendentemente e per via del tutto diversa, a risultati identici a

quelli del sig. Fredholm, benchè in parte fatti conoscere dopo la pubblicazione di questi.

Egli ha introdotto pel primo * il concetto di *deformazioni tipiche.*

Una deformazione prodotta, in un corpo elastico qualunque indefinito, da forze di massa distribuite con continuità in una parte limitata di esso, dicesi *del primo tipo;* quella prodotta nello stesso corpo da forze distribuite con continuità sopra una superficie interna e chiusa dicesi *del secondo tipo.*

Dicesi finalmente del *terzo tipo* quella eccitata nello stesso corpo da interposizione e soppressione di uno strato sottilissimo di materia aderente ad una superficie chiusa tracciata nello interno del corpo.

Queste tre deformazioni sono per l'elasticità le analoghe della funzione potenziale di spazio, di strato semplice e di doppio strato; il Gebbia ne studia le proprietà caratteristiche ** e giunge quindi al notevolissimo teorema:
qualsivoglia deformazione eccitata in un corpo elastico S da forze di massa e da tensioni in superficie è la risultante di tre deformazioni tipiche del corpo che si ottiene prolungando S in tutti i sensi.

In questa memoria però il prof. Gebbia non ha date le espressioni analitiche delle deformazioni

---

* *Propos. fond. d. statica d. corpi elast.* Rend. Cir. Matem. Palermo. **5**. p. 320; 1891.

** *Le deformazioni tipiche dei corpi solidi elastici,* Annal. d. Matem., **7**, p. 141; 1902.

tipiche, ma si è limitato a mostrare che applicando le sue considerazioni ai corpi isotropi si riottengono le formule del Somigliana.

Queste formule generali sono date in un'altra memoria, ora in corso di stampa, contenente risultati conseguiti dall'A. tra il 1892 e il 95, e in cui il Gebbia è giunto alla equazione differenziale del sesto ordine del Fredholm. L'A. ne trova con molta eleganza l'integrale utile nel caso che il primo membro di essa si decomponga in tre fattori di 2° ordine; ciò che avviene oltre che nei corpi isotropi, anche per quelli aventi un asse di elasticità e pel così detto mezzo elastico di Green.

CAPITOLO SETTIMO.

IL PROBLEMA DI BOUSSINESQ E CERRUTI

§ **1. Posizione del problema.** — Seguendo il Love, chiameremo problema di Boussinesq e Cerruti, dal nome dei primi che con metodi diversi lo hanno risoluto completamente, il seguente: *determinare la deformazione di un solido isotropo indefinito limitato da un piano indefinito, allorchè sul piano limite sono dati:* 1.° *gli spostamenti;* 2.° *le forze;* 3.° *gli spostamenti normali e le forze tangenziali o reciprocamente.**

§ **2. Risoluzione del primo problema.** — Teniamo presente quanto fu esposto nel § 4 del Capitolo precedente: però dobbiamo anzitutto:

---

* Questo problema, nel caso in cui sono note le forze normali al contorno, è stato risoluto per serie da Lamé e Clapeyron nella memoria: *Sur l'équilibre intérieur des solides homogènes.* Mem. présen. p. divers savants à l'Ac. Roy. de l'Institut de France, **4**, pag. 541-547. 1838.

È stato risoluto dal sig. Boussinesq nelle note: *Équilibre d'él. d'un sol isotrope,* etc. Compt. Rend., **86**, pag. 1260, 1878; e nel libro: *Applications des potentiels à l'étude de l'é-*

a) determinare la deformazione ausiliaria; cioè determinare nel punto qualsiasi (x, y, z) le componenti ξ, η, ζ di una deformazione corrispondente a forze di massa nulle e tali che in superficie siano verificate le condizioni

$$\xi = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \eta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \zeta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}. \tag{1}$$

Se assumiamo il piano limite per piano xy e rivolgiamo l'asse z positivo verso l'interno del solido, le equazioni precedenti varranno per $z = 0$. Le ξ, η, ζ soddisfano inoltre le equazioni indefinite

$$(\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \omega^2 \Delta_2 \xi = 0, \text{ ecc.} \tag{2}$$

Indichiamo con $M(x, y, z)$ un punto qualunque variabile nel corpo; con $M_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto fisso, ma arbitrario, del corpo stesso; M'_1 la sua immagine rispetto al piano xy e siano r ed r_1 le distanze del punto variabile M da M_1 e M'_1; sicchè

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$
$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z + z_1)^2;$$

---

quilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris, 1885; e dal prof. Cerruti nelle: *Ricerche*, più volte ricordate, Cap. II e III.

Vedi ancora Cesàro, l. c., XIV. Love, l. c. Cap. IX. Lauricella, m. c., Cap. II, e due mie note: *Equilibrio di elasticità di un corpo isotropo indefinito*, ecc. Rend. R. Acc. di Napoli, Settembre 1889 e *Sulla deformazione etc. per speciali condizioni ai limiti*, ibidem, 1891.

e quindi sul piano limite, $z = 0$, si ha

$$r = r_1.$$

Il valore in M della funzione di Green relativa al polo M_1 è dato da

$$G_1 = \frac{1}{r_1}$$

(Cap. 1°, § 10). Decomponiamo la deformazione richiesta in altre due ponendo

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \text{ ecc.},$$

e le ξ_1, η_1, ζ_1 siano armoniche in S (spazio occupato dal corpo) e in superficie soddisfino le (1); mentre $\xi_2, \ldots$ soddisfino le (2) e in superficie prendano valori nulli. La ricerca di ξ_1, η_1, ζ_1 dipende dalla risoluzione di uno dei soliti problemi dei valori al contorno e può risolversi quindi colla (25') del Cap. 1°; ma più direttamente si può osservare che le funzioni

$$\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z}$$

sono armoniche e per $z = 0$ assumono rispettivamente i valori di

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z};$$

sarà dunque

$$\xi_1 = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}, \quad \eta_1 = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}, \quad \zeta_1 = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z}. \tag{3}$$

La dilatazione cubica ϑ_1 corrispondente a questa deformazione è data da

$$\vartheta_1 = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2}.$$

Le componenti della seconda deformazione debbono essere funzioni biarmoniche in tutto S e annullarsi per $z = 0$.

Poniamo quindi

$$\xi_2 = z\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \eta_2 = z\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \zeta_2 = z\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

essendo φ una funzione armonica incognita; le espressioni suddette infatti soddisfano la $\Delta_4 = 0$ e si annullano sul piano limite.

Abbiamo

$$\vartheta_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad \vartheta = 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$\Delta_2 \xi_2 = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}; \quad \Delta_2 \eta_2 = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}; \quad \Delta_2 \zeta_2 = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2};$$

e la prima delle equazioni indefinite diventa:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{2(\Omega^2-\omega^2)}{\Omega^2+\omega^2}\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial z^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}=0;$$

e avremo due equazioni analoghe mutando x in y e z. Quindi, prescindendo, come è ovvio, da una costante,

$$\varphi=-2\frac{\Omega^2-\omega^2}{\Omega^2+\omega^2}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}.$$

In conseguenza dunque:

$$\left.\begin{aligned}
\xi&=-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}-2\frac{\Omega^2-\omega^2}{\Omega^2+\omega^2}z\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z}\\
\eta&=-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}-2\frac{\Omega^2-\omega^2}{\Omega^2+\omega^2}z\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z}\\
\zeta&=-\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}-2\frac{\Omega^2-\omega^2}{\Omega^2+\omega^2}z\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial z^2}
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\vartheta=\frac{4\omega^2}{\Omega^2+\omega^2}\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial z^2}.$$

Precisamente φ è determinata a meno di una funzione arbitraria di x ed y, dalla quale si può pure prescindere.

Ora dobbiamo:

b) determinare le forze da applicare in superficie perchè producano la deformazione precedentemente calcolata. Tale determinazione non presenta difficoltà; notando infatti che la direzione della normale n coincide con z, le equazioni ai limiti diventano

$$\frac{1}{\rho} L_0 + 2\,\omega^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} - \omega^2 T_2 = 0$$

$$\frac{1}{\rho} M_0 + 2\,\omega^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} + \omega^2 T_1 = 0$$

$$\frac{1}{\rho} N_0 + 2\,\omega^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\Omega^2 - 2\,\omega^2)\,\vartheta = 0.$$

Tutte le quantità che figurano in queste formule debbono essere calcolate per $z = 0$. Riflettendo che, appunto per $z = 0$,

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}; \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z};$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2},$$

si ha (sempre per $z = 0$)

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{3\,\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{3\,\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z};$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{3\,\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}; \quad \vartheta = \frac{4\,\omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}.$$

Il calcolo delle rotazioni è egualmente semplice; infatti si ha dapprima

$$T_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z} + 2 \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z} + \ldots$$

e i termini che seguono contengono z a fattore: quindi per $z = 0$ risulta

$$T_1 = - \frac{4 \, \Omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \, \partial z}; \text{ e così } T_2 = \frac{4 \, \Omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial z};$$

onde infine:

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= -2 \rho \omega^2 \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial z} \\ M_0 &= -2 \rho \omega^2 \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \, \partial z} \\ N_0 &= -2 \rho \omega^2 \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Passiamo ora alle terza ed ultima parte, cioè:

c) determinare la dilatazione cubica e la effettiva deformazione nel punto x_1, y_1, z_1.

La dilatazione cubica Θ è subito determinata dalla formula del Betti (form. 19, Cap. 6°). Supponiamo che siano nulle le forze di massa. No-

tiamo poi che, per le (5)

$$\int\left(\frac{1}{\rho}L_0 + 2\,\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1\,\partial z}\right) u\,d\sigma =$$

$$= -\frac{4\,\omega^2\,\Omega^2}{\Omega^2+\omega^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial z_1}\int\frac{u\,d\sigma}{r}\,;\text{ecc.}$$

se quindi poniamo

$$\left.\begin{aligned} P=\int\frac{u\,d\sigma}{r},\quad Q=\int\frac{v\,d\sigma}{r},\quad R=\int\frac{w\,d\sigma}{r} \\ T=\frac{\partial P}{\partial x_1}+\frac{\partial Q}{\partial y_1}+\frac{\partial R}{\partial z_1}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

risulta

$$\Theta = -\frac{1}{\pi}\,\frac{\omega^2}{\Omega^2+\omega^2}\,\frac{\partial T}{\partial z_1}\,; \qquad (7)$$

formula semplicissima, la cui costruzione dipende da quella delle tre funzioni potenziali di semplice strato P, Q, R.

Se le forze di massa non fossero nulle la (7) seguiterebbe a sussistere, salvo una maggior complicazione nella espressione di T. La ricerca di u, v, w non presenta più alcuna difficoltà; infatti la u soddisfa l'equazione

$$(\Omega^2-\omega^2)\,\frac{\partial\Theta}{\partial x_1} + \omega^2\,\Delta_2\,u = 0,$$

da cui

$$\Delta_2\,u = \frac{1}{\pi}\,\frac{\Omega^2-\omega^2}{\Omega^2+\omega^2}\,\frac{\partial^2 T}{\partial x_1\,\partial z_1}\,;$$

ed inoltre in superficie si conoscono i valori di u. Ponendo

$$u = u' + \frac{1}{2\pi}\frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} z_1 \frac{\partial T}{\partial x_1}$$

si vede subito che u' è armonica ed in superficie ($z_1 = 0$) è $u = u'$; quindi per la (25') del Cap. 1°, si ha

$$u' = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int \frac{u\, d\sigma}{r} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial z_1}$$

e in conseguenza

$$u = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial z_1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} z_1 \frac{\partial T}{\partial x_1}; \qquad (8)$$

e due formule analoghe per v e w. Queste risolvono completamente il problema proposto mediante integrali definiti rappresentanti determinate funzioni potenziali di semplici strati *.

§ **3. Risoluzione del secondo problema.** — Seguendo ancor qui il metodo generale svolto nel § 5 del Cap. precedente, dobbiamo:

a) determinare una deformazione ausiliaria corrispondente a forze di massa nulle e a forze superficiali date da:

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= 2\rho\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z}, \quad M_0 = 2\rho\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z}, \\ N_0 &= 2\rho\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

* Le formule (8), ritrovate poi con metodi svariatissimi, sono state assegnate dal prof. Cerruti per la prima volta.

La determinazione delle ξ, η, ζ corrispondenti si può fare in modo assai semplice profittando dei risultati del § precedente.

Se paragoniamo infatti le (9) colle (5), si vede che le forze in superficie in questo caso stanno nel rapporto costante $-\frac{\Omega^2+\omega^2}{\Omega^2-\omega^2}$ con quelle della deformazione ausiliaria precedente: però le componenti di spostamento si otterranno dalle (4) del problema precedente moltiplicando per il rapporto suddetto: onde otterremo

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{\Omega^2+\omega^2}{\Omega^2-\omega^2}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}+2z\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z}\\
\eta &= \frac{\Omega^2+\omega^2}{\Omega^2-\omega^2}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}+2z\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z}\\
\zeta &= -\frac{\Omega^2+\omega^2}{\Omega^2-\omega^2}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}+2z\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial z^2}.
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Da queste si ricava subito, per $z=0$,

$$\left.\begin{aligned}
\xi=\frac{\Omega^2+\omega^2}{\Omega^2-\omega^2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x},\quad \eta=\frac{\Omega^2+\omega^2}{\Omega^2-\omega^2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y},\\
\zeta=\frac{\Omega^2+\omega^2}{\Omega^2-\omega^2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}.
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Dopo ciò la formula solita del Betti ci farà conescere Θ; supponiamo anche, per semplicità, nulle le forze di massa ed osserviamo che:

$$\frac{1}{\rho}\int L\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}-\xi\right)d\sigma=\frac{2\,\Omega^2}{\rho\,(\Omega^2-\omega^2)}\frac{\partial}{\partial x_1}\int L\frac{d\sigma}{r}=$$

$$=4\,\pi\,\Omega^2\cdot\frac{\partial P}{\partial x_1},\text{ ecc.}$$

e dove si è posto

$$P=\frac{1}{2\,\pi\,\rho\,(\Omega^2-\omega^2)}\int L\frac{d\sigma}{r},\text{ ecc.}\qquad(12)$$

Risulta

$$\Theta=\frac{\partial P}{\partial x_1}+\frac{\partial Q}{\partial y_1}+\frac{\partial R}{\partial z_1}.$$

Per porre Θ sotto una forma analoga alla (7), poniamo

$$\left.\begin{aligned}P_1&=\int P\,d\,z_1=\frac{1}{2\,\pi\,\rho\,(\Omega^2-\omega^2)}\int L\,d\,\sigma\int\frac{d\,z_1}{r}=\\&=\frac{1}{2\pi\rho\,(\Omega^2-\omega^2)}\int\log(z_1-z+r)\,L\,d\,\sigma,\text{ ecc.},\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

e poi

$$T=\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_1}{\partial y_1}+\frac{\partial R_1}{\partial z_1};\qquad(14)$$

avremo semplicemente

$$\Theta=\frac{\partial T}{\partial z_1}.\qquad(15)$$

Se le forze di massa non fossero nulle, variando in modo conveniente ed ovvio i valori di $P_1, \ldots$ giungeremmo alla stessa formula. La ricerca di Θ dipende dunque ancor qui dalla costruzione di tre funzioni potenziali di strato semplice P, Q, R. Le funzioni P_1, Q_1, R_1, T sono armoniche. Determinata Θ, conforme al metodo generale, si deve:

b) determinare la rotazione; la quale, a sua volta, dipende dalla ricerca di una funzione armonica. Ma senza applicare il metodo generale e le formule (33) del Cap. precedente, possiamo procedere direttamente così: le equazioni indefinite di equilibrio, per il valore (15), diventano

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial z_1} + \frac{\partial T_2}{\partial z_1} - \frac{\partial T_3}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial z_1} + \frac{\partial T_3}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial z_1} = 0$$

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 T}{\partial z_1^2} + \frac{\partial T_1}{\partial y_1} - \frac{\partial T_2}{\partial x_1} = 0,$$

e tenendo conto che è

$$\Delta_2 T = 0,$$

si possono anche scrivere così

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(T_2 + \frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial T}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial T_3}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial z_1}\left(T_1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial T}{\partial y_1}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(T_1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial T}{\partial y_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(T_2 + \frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial T}{\partial x_1}\right) = 0.$$

Indicando quindi con E una funzione incognita si ha

$$\left.\begin{aligned} T_1 = \frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial T}{\partial y_1} + \frac{\partial E}{\partial x_1}, \quad T_2 = -\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial E}{\partial y_1}, \\ T_3 = \frac{\partial E}{\partial z_1} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

e poichè

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial y_1} + \frac{\partial T_3}{\partial z_1} = 0$$

risulta

$$\Delta_2 E = 0;$$

dunque la E è armonica. Le (16) corrispondono precisamente alle (33) del capitolo precedente. Supposta, per ora, nota la E possiamo:

c) determinare gli spostamenti effettivi.

Per la (15) le equazioni indefinite assumono anche la forma

$$\Delta_2 u = -\frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial z_1}; \text{ ecc.,} \qquad (17)$$

e per i valori (16) le equazioni in superficie si riducono a

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z_1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial y_1} - \frac{\Omega^2}{2\omega^2}\frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{1}{2\rho\omega^2}L \\ \frac{\partial v}{\partial z_1} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial x_1} - \frac{\Omega^2}{2\omega^2}\frac{\partial T}{\partial y_1} - \frac{1}{2\rho\omega^2}M \\ \frac{\partial w}{\partial z_1} &= -\frac{\Omega^2 - 2\omega^2}{2\omega^2}\frac{\partial T}{\partial z_1} - \frac{1}{2\rho\omega^2}N; \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

sicchè la ricerca di u, v, w dipende dal problema della determinazione di una funzione regolare in S allorchè è noto il Δ_2 in ogni punto di S e il valore della derivata normale al contorno. Tale problema, per il campo considerato, e per una funzione armonica è stato risoluto al Cap. 1° colla formula (26')

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{du}{dn}\frac{d\sigma}{r}, \tag{19}$$

e sarebbe ben facile assegnare la formula corrispondente al caso in cui il Δ_2 non è nullo.

Si può per altro procedere con metodo più diretto ed elegante.

Come già fu osservato al § 2 una soluzione particolare delle (17) è data da

$$-\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2} z_1 \frac{\partial T}{\partial x_1}, \text{ ecc.}$$

Se dunque poniamo

$$u = u' - \frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2} z_1 \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad v = v' - \frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2} z_1 \frac{\partial T}{\partial y_1},$$

$$w = w' - \frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2} z_1 \frac{\partial T}{\partial z_1},$$

le u', v', w' saranno armoniche e, in virtù delle (18), soddisfaranno al contorno, cioè per $z_1 = 0$, alle condizioni seguenti

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial z_1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial y_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{1}{2\rho\omega^2} L \\
\frac{\partial v'}{\partial z_1} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial y_1} - \frac{1}{2\rho\omega^2} M \\
\frac{\partial w'}{\partial z_1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial z_1} - \frac{1}{2\rho\omega^2} N.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Ora poniamo

$$u' = u_1 + u_2, \text{ ecc.}$$

essendo u_1, $v_1, \ldots w_2$ funzioni armoniche tali che al contorno

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = -\frac{1}{2\rho\omega^2} L, \text{ ecc.}; \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial z_1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial y_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial z_1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial w_2}{\partial z_1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial z_1}. \end{aligned}\right\} \tag{21'}$$

Le (20), dopo ciò, sono certamente soddisfatte.

Le u_1, v_1, w_1 si determinano subito applicando la (19). Però è necessario che (Cap. 1° form. 9) sia

$$\int \frac{\partial u}{\partial z_1} d\sigma = 0$$

cioè

$$\int L\, d\sigma = 0$$

e due analoghe che, per le condizioni di equilibrio del corpo supposto rigido, sono certamente verificate. Abbiamo dunque

$$u_1 = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2}\int L\frac{d\sigma}{r} = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2}\frac{\partial P_1}{\partial z_1},$$

$$v_1 = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2}\frac{\partial Q_1}{\partial z_1}; \quad w_1 = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2}\frac{\partial R_1}{\partial z_1};$$

in virtù delle (12) e (13).

La forma specialissima della terza delle (21′) permette di assegnare agevolmente w_2. Considerando infatti la funzione

$$\frac{\partial w_2}{\partial z_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial z_1}$$

in un punto qualunque del campo, si vede subito che è armonica e in superficie si annulla; però è nulla in tutto il campo, e possiamo prendere

$$w_2 = \frac{1}{2} T.$$

Lo stesso metodo è applicabile ad u_2 e v_2 se si riesce a porre i secondi membri delle prime due delle (21′) sotto forma di una derivata rispetto z_1 e ciò si ottiene molto agevolmente. Infatti alla funzione armonica incognita E sostituiamone una altra E_1 tale che

$$E = \frac{\partial E_1}{\partial z_1} \tag{22}$$

e alla T sostituiamo la O tale che

$$T = \frac{\partial O}{\partial z_1}. \tag{23}$$

A tal uopo basterà determinare tre funzioni armoniche U, V, W in modo che

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial z_1}, \quad Q_1 = \frac{\partial V}{\partial z_1}, \quad R_1 = \frac{\partial W}{\partial z_1} \tag{24}$$

perchè risulti

$$O = \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial W}{\partial z_1}. \tag{25}$$

Rammentando il valore (13), risulta dalle (24)

$$U = \int P_1 dz_1 = \frac{1}{2\pi\rho(\Omega^2 - \omega^2)} \int L d\sigma \int \log(z_1 - z + r) dz_1$$

ed integrando per parti

$$U = \frac{1}{2\pi\rho(\Omega^2 - \omega^2)} \int \{(z_1 - z)\log(z_1 - z + r) - r\} L d\sigma \tag{26}$$

e due espressioni analoghe per V e W cambiando L in M ed N.

Procedendo ora come per w_2 si ricava

$$u_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial E_1}{\partial y_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial O}{\partial x_1}; \quad v_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial E_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial O}{\partial y_1}.$$

Dunque

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2} - z_1 \frac{\partial^2 O}{\partial x_1 \partial z_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial O}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial E_1}{\partial y_1} \\
v &= \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2} - z_1 \frac{\partial^2 O}{\partial y_1 \partial z_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial O}{\partial y_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial E_1}{\partial x_1} \\
w &= \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z_1^2} - z_1 \frac{\partial^2 O}{\partial z_1^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial O}{\partial z_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Non occorre quindi conoscere altro che E_1. Ci varremo perciò di due diverse espressioni di T_3;

e cioè della terza delle (16)

$$T_3 = \frac{\partial^2 E_1}{\partial z_1^2}$$

e dell'altra che si deduce dalle (27)

$$T_3 = \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial y_1} =$$

$$= \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial U}{\partial y_1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial y_1^2}\right).$$

Dal confronto si deduce

$$E_1 = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial U}{\partial y_1}\right). \qquad (28)$$

Le (27), (28) unitamente colle (26) e (25) risolvono completamente il problema proposto; le espressioni definitive degli spostamenti dipendono dalla costruzione delle sole tre funzioni armoniche (26) *.

§ **4. Risoluzione del terzo problema.** — Supponiamo che sul piano limite siano date le componenti u, v degli spostamenti (spostamenti tangenziali) e la componente N delle forze (forze normali). Dobbiamo, come fu detto al § 6:

a) determinare una deformazione ausiliaria corrispondente a forze di massa nulle e tale che

* Anche le semplici formule risolutive di questo caso sono state date per la prima volta dal prof. Cerruti. Nei lavori sopracitati si possono vedere interessanti applicazioni dei risultati generali.

in superficie ($z=0$) siano soddisfatte le

$$\xi = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}; \quad \eta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y};$$

$$N_0 = -2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} = 2\rho\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}.$$

Ma dalla terza delle equazioni al contorno si deduce

$$\frac{1}{\rho} N_0 + 2\omega^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\Omega^2 - 2\omega^2)\vartheta = 0.$$

Inoltre per $z=0$ è

$$\vartheta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} =$$

$$= -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} + \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

quindi l'equazione precedente ci dà

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \qquad (z=0).$$

Dunque è $\vartheta = 0$ sul piano limite; ma essa è armonica, le forze di massa essendo nulle, però è nulla in tutto lo spazio S. Quindi, per questa

favorevole circostanza, le equazioni indefinite si riducono alle

$$\Delta_2 \xi = \Delta_2 \eta = \Delta_2 \zeta = 0.$$

La ricerca di ξ, η, ζ dipende dal solito problema dei valori al contorno; ma senza applicare le formule generali, osservando che le funzioni

$$\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z}$$

sono armoniche e per $z = 0$ è

$$\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}; \quad \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2},$$

si deduce subito

$$\xi = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}, \quad \eta = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}, \quad \zeta = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z}; \qquad (29)$$

cioè la deformazione ausiliaria ha per componenti le derivate negative della funzione di Green. * Passiamo ora a

b) determinare le forze da applicare in superficie perchè la deformazione corrispondente sia quella già calcolata.

---

* Questa proprietà della funzione di Green sussiste ancora nel problema analogo del diedro, del triedro e in quello dello strato di spessore finito.

Il calcolo di L_0, M_0 (N_0 è già noto) si fa assai semplicemente dalle equazioni in superficie, da cui scompariscono i termini in ϑ e quelli contenenti le rotazioni. Si ha dunque

$$L_0 + 2\rho\omega^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$$

donde

$$L_0 = 2\rho\omega^2 \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial z} \right)_0 = -2\rho\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial z};$$

e analogamente

$$M_0 = -2\rho\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \, \partial z}.$$

Quindi la formula del Betti, posto

$$\left. \begin{aligned} U = \int u \frac{d\sigma}{r}; \quad V = \int v \frac{d\sigma}{r}; \quad N_1 = \frac{1}{\rho} \int N \frac{d\sigma}{r} \\ T = N_1 - 2\omega^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \right), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ci dà

$$\Theta = \frac{1}{2\pi\Omega^2} \frac{\partial T}{\partial z_1}; \quad (31)$$

la quale non differisce dalla (7), relativa al primo problema, che per il fattore numerico

$$-\frac{\Omega^2 + \omega^2}{2\omega^2 \Omega^2}.$$

Finalmente dobbiamo:

c) determinare gli spostamenti effettivi. Il valore di u o di v non differisce da quello del primo problema che pel fattore costante suddetto. Il calcolo di w è, naturalmente, diverso. La w soddisfa la

$$\Delta_2 w = -\frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\pi\,\omega^2\,\Omega^2}\frac{\partial^2 T}{\partial z_1^2},$$

mentre per $z_1 = 0$ è

$$\frac{1}{\rho} N + 2\,\omega^2 \frac{\partial w}{\partial z_1} + (\Omega^2 - 2\,\omega^2)\,\Theta = 0.$$

Una soluzione particolare dell'equazione indefinita è

$$-\frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\,\pi\,\omega^2\,\Omega^2} z_1 \frac{\partial T}{\partial z_1}.$$

Se quindi poniamo

$$w = w' - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\,\pi\,\omega^2\,\Omega^2} z_1 \frac{\partial T}{\partial z_1}$$

la w' è armonica e in superficie sarà

$$\frac{\partial w'}{\partial z_1} = -\frac{N}{2\,\rho\,\omega^2} + \frac{1}{4\,\pi\,\Omega^2}\frac{\partial T}{\partial z_1};$$

operando come nel problema precedente otteniamo

$$w' = \frac{1}{4\,\pi\,\Omega^2} T + \frac{1}{4\,\pi\,\omega^2} N_1.$$

La soluzione completa del problema, come si vede, dipende dalla costruzione di tre funzioni potenziali di semplici strati U, V, N_1 *.

Cogli stessi procedimenti si possono risolvere gli altri problemi, cioè quando si conoscono le forze tangenziali e gli spostamenti normali; oppure u, M ed N, ecc.

§ 5. Altra risoluzione dei problemi precedenti. — Si può giungere ai risultati precedenti con metodi più diretti e semplici. Supporremo sempre nulle le forze di massa; e cominceremo dal

1° problema. — Le componenti di spostamento sono biarmoniche in tutto S; però rammentando quanto fu detto al § 12 del 1° Cap. ciascuna di queste componenti è rappresentabile con

$$u' + z_1 u''$$

essendo u' ed u'' regolari, nello stesso campo, insieme colle derivate prime, seconde, ecc. e soluzioni della $\Delta_2 = 0$.

Volendo quindi calcolare la deformazione nel punto x_1, y_1, z_1 porremo

$$\left.\begin{aligned} u = z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial z_1}, \quad v = z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1}, \\ w = z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + \frac{\partial W}{\partial z_1}, \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

* Il signor Boussinesq ha pel primo proposti e risolùti i problemi di questo terzo tipo, *Compt. Rend.*, **106**, pag. 1043 e 1119. 1888.

La soluzione esposta, lievemente modificata, è dovuta al prof. Cerruti, *Rend. R. Acc. Lincei*, 1888.

essendo φ, U, V, W regolari colle loro derivate prime, ecc. e soluzioni della $\Delta_2 = 0$. Deduciamo quindi

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 u &= 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial z_1} \\ \Theta &= \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial W}{\partial z_1}\right) \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

e la prima delle equazioni indefinite ci dà

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(2\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}\Theta\right) = 0$$

e così avremo due equazioni analoghe mutando x_1 in y_1 e z_1; quindi, a meno di una costante dalla quale si può prescindere, si ha

$$2\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}\Theta = 0 \quad (34)$$

e sostituendo in questa il valore di Θ si ha pure

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left\{(\Omega^2 + \omega^2)\varphi + (\Omega^2 - \omega^2)\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial W}{\partial z_1}\right)\right\} = 0,$$

alla quale si può soddisfare ponendo

$$\varphi = -\frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial W}{\partial z_1}\right);$$

però la soluzione del problema dipende dalla conoscenza di U, V, W.

Ma in superficie, cioè per $z_1 = 0$, si ha

$$u = \frac{\partial U}{\partial z_1}, \text{ ecc.};$$

e i valori di u al contorno sono noti; applicando quindi una formula già ricordata, si ha

$$U = -\frac{1}{2\pi}\int u\frac{d\sigma}{r} = -\frac{1}{2\pi}P, \text{ ecc.}$$

per le (6). Quindi

$$\varphi = \frac{\Omega^2 - \omega^2)}{2\pi(\Omega^2 + \omega^2)}T.$$

Sostituendo questi valori nelle (32) otterremo le formule (8) del Cerruti.

Passiamo alla soluzione del

2° problema. — La risoluzione diretta di questo problema è fondata sopra certe equazioni cui soddisfano le componenti speciali di pressione.

Ricordiamo perciò che le (12) del cap. 4.° ci danno

$$X_x = -\lambda\Theta - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x_1}\ldots;$$

$$Y_z = -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y_1} + \frac{\partial v}{\partial z_1}\right).$$

Le equazioni di equilibrio sono, adoperando le costanti E e $\varkappa$,

$$\Delta_2 u + \frac{1}{(1-2\varkappa)}\frac{\partial\Theta}{\partial x_1} = 0, \text{ ecc.}$$

Rammentiamo infine che posto

$$P = X_x + Y_y + Z_z$$

risulta

$$\Theta = -\frac{1-2\varkappa}{E} P.$$

Di qui si deduce

$$\Delta_2 X_x = -2\mu \frac{\partial \Delta_2 u}{\partial x_1} = \frac{2\mu}{1-2\varkappa} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1^2}$$

cioè

$$\Delta_2 X_x = -\frac{2\mu}{E} \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2}$$

e due analoghe. Parimenti

$$\Delta_2 Y_z = -\mu \left(\frac{\partial \Delta_2 w}{\partial y_1} + \frac{\partial \Delta_2 v}{\partial z_1} \right) = -\frac{2\mu}{E} \frac{\partial^2 P}{\partial y_1 \partial z_1}, \text{ ecc.};$$

ed essendo Θ e P armoniche, le componenti speciali di pressione saranno biarmoniche. Però possiamo porre

$$Z_x = -\frac{\mu}{E} z_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial z_1}; \quad Z_y = -\frac{\mu}{E} z_1 \frac{\partial P}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1}$$

$$Z_z = -\frac{\mu}{E} z_1 \frac{\partial P}{\partial z_1} + \frac{\partial W}{\partial z_1}$$

essendo U, V, W regolari insieme colle derivate prime, ecc. e soluzioni della $\Delta_2 = 0$.

Inoltre per $z_1 = 0$ le Z_x, Z_y, Z_z assumono valori dati L, M, N; dunque per una formula più volte ricordata

$$U = -\frac{1}{2\pi} \int L \frac{d\sigma}{r}, \text{ ecc.},$$

cioè valendoci delle (12) abbiamo

$$U = -\rho(\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial P_1}{\partial z_1}, \text{ ecc.}$$

Per determinare la funzione P valiamoci della equazione

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x_1} + \frac{\partial Z_y}{\partial y_1} + \frac{\partial Z_z}{\partial z_1} = 0,$$

che possiamo scrivere

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(-\frac{\mu}{E}P + \frac{\partial W}{\partial z_1}\right) - \frac{\mu}{E} z_1 \frac{\partial^2 P}{\partial z_1^2} + \frac{\partial Z_x}{\partial x_1} + \frac{\partial Z_y}{\partial y_1} = 0.$$

Inoltre

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x_1} = -\frac{\mu}{E} z_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial z_1}, \text{ ecc.}$$

quindi per $z_1 = 0$ avremo

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(-\frac{\mu}{E}P + \frac{\partial W}{\partial z_1}\right) = -\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1}\right);$$

ma le quantità entro parentesi soddisfano la $\Delta_2 = 0$, onde, a meno di una costante arbitraria, avremo

$$\frac{\mu}{E}P = \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial W}{\partial z_1}$$

cioè:

$$\frac{\mu}{1-2\varkappa}\Theta = \rho(\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial y_1} + \frac{\partial R_1}{\partial z_1}\right)$$

e questa, per essere

$$\frac{\mu}{1-2\varkappa} = \rho\,(\Omega^2 - \omega^2)\,,$$

coincide colla (15). Dopo ciò conviene procedere come al § 3 per la ricerca delle u, v, w, *.

Anche i problemi del terzo tipo possono essere risoluti direttamente; accenniamo ad una soluzione che si presta ad importanti generalizzazioni.

Siano ξ, η, ζ le componenti di spostamento per il solito spazio S essendo nulle le forze di massa ed L_0, M_0, N_0 le trazioni in superficie. Se poniamo

$$\xi' = \xi\,(x, y, -z),\ \eta' = \eta\,(x, y, -z),\ \zeta' = -\,\zeta\,(x, y, -z)$$

le nuove componenti soddisfano evidentemente alle stesse equazioni di equilibrio e rappresentano una deformazione del semispazio situato dalla parte delle z negative. Si dice brevemente che questa soluzione è ottenuta dalla prima " *per riflessione* ".

Tra le componenti di deformazione relative alle due terne di spostamento, sul piano $z = 0$, si hanno le seguenti relazioni

$$a' = a,\ b' = b,\ c' = c\,;\ f' = -f;\ g' = -g\,;\ h' = h$$

e quindi ancora

$$X'_x = X_x\,,\ Y'_y = Y_y\,,\ Z'_z = Z_z$$

$$Y_z' = -\,Y_z\,,\quad Z'_x = -\,Z_x\,,\quad X'_y = X_y\,.$$

---

* Le soluzioni qui esposte sono dovute al prof. ALMANSI, *Annali di Matem.*, **2**, 1898.

e infine:

$$L'_0 = -L_0, \quad M'_0 = -M_0, \quad N'_0 = N_0,$$

avendo accentate, com'è chiaro, tutte le grandezze che si riferiscono alla seconda deformazione. Dunque la deformazione ottenuta dalla prima per riflessione corrisponde al caso in cui le trazioni in superficie sono

$$-L_0, \quad -M_0, \quad N_0.$$

Se ora poniamo

$$u_1 = \xi - \xi', \quad v_1 = \eta - \eta', \quad w_1 = \zeta - \zeta'$$

otteniamo una nuova deformazione corrispondente a forze in superficie

$$L_1 = L_0 - L'_0 = 2\,L_0, \quad M_1 = 2\,M_0, \quad N_1 = 0$$

e inoltre sul piano limite, cioè per $z = 0$, sarà

$$u_1 = v_1 = 0.$$

Supponiamo infine che in un punto del campo, che ora vogliamo distinguere con x_1, y_1, z_1, le ξ, η, ζ diventino infinite del primo ordine: la esistenza di integrali siffatti delle equazioni di equilibrio di un corpo anisotropo è stata posta in luce dalle ricerche del Fredholm come già si è detto. Se il corpo è isotropo (ciò che vogliamo supporre) possiamo assumere per ξ, η, ζ le espressioni (16) del Cap. 6°; quindi le L_0, M_0, N_0 coincideranno con le L_1, M_1, N_1 delle formule (17) quando in esse si ponga $n \equiv z$.

Diciamo poi u, v, w gli spostamenti corrispondenti alle forze L, M, N agenti in superficie. Alle due deformazioni accennate applichiamo il teorema del Betti, avendo cura però di escludere dal campo il punto x_1, y_1, z_1 con una sfera σ_0 che ha centro in quel punto; si ha dunque

$$\int (u L_1 + v M_1 - w_1 N) \, d\sigma =$$
$$= \int (u L_1 + \ldots) \, d\sigma_0 - \int (u_1 L + \ldots) \, d\sigma_0 .$$

Facciamo impiccolire indefinitamente il raggio di σ_0: avremo che al limite

$$\int (u_1 L + \ldots) \, d\sigma_0$$

tende a zero; mentre coi procedimenti del § 3 del Cap. 6° si ha che

$$\int (u L_1 + \ldots) \, d\sigma_0$$

tende a

$$16 \pi \rho \omega^2 u (x_1, y_1, z_1);$$

dunque

$$16 \pi \rho \omega^2 u (x_1, y_1, z_1) = \int (u L_1 + v M_1 - w_1 N) \, d\sigma$$

e formule analoghe. Conosceremo cioè la deformazione allorchè sul piano limite si conoscono gli spostamenti tangenziali e le forze normali.

Per ottenere la formula definitiva occorre sostituire ad L_0, M_0, ξ i valori ricavati dalle (16) e (17) del Cap. 6.°

Ponendo invece

$$u_2 = \xi + \xi', \quad v_2 = \eta + \eta', \quad w_2 = \zeta + \zeta'$$

sul piano limite avremo

$$L_2 = M_2 = w_2 = 0\,, \qquad N_2 = 2\,N_0$$

e procedendo come prima

$$16\,\pi\,\rho\,\omega^2\,u\,(x_1, y_1, z_1) = \int (N_2\,w - L\,u_2 - M\,v_2)\,d\sigma, \text{ ecc.},$$

le quali risolvono il problema complementare del precedente. Tale metodo * è pure applicabile al caso in cui il corpo essendo cristallino ammette il piano $z = 0$ come piano di simmetria.

Un altro metodo per la risoluzione dei problemi del suolo isotropo, proposto recentemente e che

---

* Il metodo è dovuto al prof. SOMIGLIANA, *Rend. Accad. Lincei*, febbr. 1902. Applicando lo stesso metodo egli ha ancora potuto risolvere dei problemi nuovi relativi alla *deformazione di un diedro retto indefinito isotropo oppure cristallino con due piani di simmetria elastica paralleli alle facce del diedro*, allorchè sopra le facce del diedro sono date le componenti normali delle forze e le componenti tangenziali degli spostamenti o viceversa.

Il problema della deformazione di un diedro (triedro) retto isotropo, allorchè sulle facce si conoscono le componenti degli spostamenti (o delle forze) è stato risoluto, per via di approssimazioni successive, dal prof. TEDONE, *Rend. Acc. Lincei*, dicembre 1901. Del resto ai nuovi problemi proposti dal professore Somigliana si può applicare con successo il metodo di integrazione del Betti. Vedi una mia nota nei *Rend. Acc. Lincei*, aprile 1902.

Il problema della deformazione di una lastra isotropa (spazio indefinito limitato tra due piani paralleli) ha formato oggetto di un lavoro del prof. SOMIGLIANA, *Nuovo Cimento*, 1885-86; è stato completamente risoluto, coi metodi generali, dal prof. CERRUTI, che ha pubblicato un solo annuncio delle sue ricerche, *Rend. Acc. Lincei*, **1**, 1884, pag. 521. Vedi pure una recente nota del dott. ORLANDO, *Rend. Circ. Matem. di Palermo*. **17**. 1903.

noi svilupperemo nel caso più semplice in cui sul piano limite sono noti gli spostamenti, è il seguente.

L'equazioni indefinite di equilibrio sono

$$\Delta_2 u + \frac{1}{2} m \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} = 0, \text{ecc.}$$

m essendo costante. Ricordiamo poscia che

$$\Delta_2 (x_1 \Theta) = 2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_1}$$

quindi

$$\Delta_2 (u + m x_1 \Theta) = 0$$

e però, in virtù della formula (25') del Cap. 1°,

$$u + m x_1 \Theta = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \int \frac{u + m x \Theta}{r} d\sigma$$

$$\Theta = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \int \frac{\Theta}{r} d\sigma$$

in cui i valori u, Θ sotto il segno integrale s'intendono riferiti al punto x, y, z del contorno. Si deduce dunque

$$u(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \int \frac{u d\sigma}{r} + \frac{m}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \int \frac{x_1 - x}{r} \Theta d\sigma.$$

Riflettendo poi che

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \frac{x_1 - x}{r} = -\frac{x_1 - x}{r^3} z_1 = z_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}$$

si può anche scrivere

$$u(x_1,y_1,z_1) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int\frac{u\,d\sigma}{r} + \frac{m}{2\pi}z_1\frac{\partial}{\partial x_1}\int\frac{\Theta\,d\sigma}{r};$$

parimenti

$$v(x_1,y_1,z_1) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int\frac{v\,d\sigma}{r} + \frac{m}{2\pi}z_1\frac{\partial}{\partial y_1}\int\frac{\Theta\,d\sigma}{r}.$$

Per w si opera anche più semplicemente, poichè al contorno è $z_1 = 0$; onde si ha

$$w + m\,z_1\,\Theta = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int\frac{w\,d\sigma}{r},$$

$$\Theta = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int\frac{\Theta\,d\sigma}{r}$$

e quindi

$$w(x_1,y_1,z_1) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int\frac{w\,d\sigma}{r} + \frac{m}{2\pi}z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\int\frac{\Theta\,d\sigma}{r}.$$

Valendosi ora delle (6) del § 2 e posto inoltre

$$\varphi = \int\frac{\Theta\,d\sigma}{r}$$

si hanno le formule

$$u = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial z_1} + \frac{m}{2\pi}z_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \text{ ecc.}$$

Si tratta di determinare φ. Derivando le equazioni precedenti rispetto x_1, y_1, z_1 e poi sommando

si ha

$$\Theta = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial T}{\partial z_1} + \frac{m}{2\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}; \quad \Theta = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}$$

quindi

$$\frac{\partial T}{\partial z_1} = (1+m)\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}$$

cioè

$$\varphi = \frac{1}{1+m}T.$$

Otterremo con ciò

$$u = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial z_1} + \frac{m}{2\pi(1+m)}z_1\frac{\partial T}{\partial x_1}, \text{ ecc.};$$

cioè nuovamente le formule (8) del Cerruti.

Si potrebbe allo stesso modo trattare il caso delle forze o i casi misti; ecc. *.

---

* Per lo sviluppo completo di questi metodi e la loro applicazione a casi svariati vedi la memoria del prof. TEDONE, *Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo.* Annali di Matem., **8**, 1902.

CAPITOLO OTTAVO.

LA DEFORMAZIONE DI UNA SFERA ISOTROPA

Lamé è stato il primo a risolvere il problema della deformazione di una sfera e di un involucro sferico isotropo allorchè sono date le forze agenti in superficie; riferendo i punti ad un sistema di coordinate polari e formando anzitutto le soluzioni semplici delle equazioni differenziali del problema, egli espresse le componenti di spostamento mediante serie doppie i cui coefficienti sono determinati mediante le condizioni ai limiti.

W. Thomson (Lord Kelvin) ha considerato il problema più generale in cui la sfera è soggetta all'azione di forze derivabili da un potenziale che soddisfa l'equazione di Laplace. Nella soluzione le componenti ortogonali di spostamento sono espresse mediante serie semplici con metodo applicabile a problemi assai più generali.

Il prof. G. H. Darwin ha trasformato la soluzione di Thomson in coordinate polari in un caso particolare e solo negli ultimi tempi il prof. Chree ha ripreso a trattare lo stesso problema in gene-

rale, valendosi ancora delle coordinate polari, ma con metodo del tutto diverso da quello di Lamé, e nell'ipotesi più generale di Thomson *.

La prima soluzione dal problema mediante integrali definiti è dovuta al Borchardt **: seguirono poscia quelle del prof. Somigliana *** e del prof. Cerruti, il quale, applicando il metodo generale di integrazione sviluppato nel Cap. 6°, assegnò pure mercè integrali definiti la deformazione di una sfera e di un involucro sferico allorchè sulla superficie limite sono noti gli spostamenti o le forze ****.

Sono stati anche risoluti i problemi misti, quando cioè sulla superficie limite è nota parte degli spo-

---

* Lamé, *Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques.* Journ. Liouville, **19**, 1854. *Coordonnées curvilignes.* Paris, 1859, pag. 299.

Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, Vol. I, Parte II, § 735. 1883.

W. Thomson, *Mathematical and Physical Papers*, Vol. III, pag. 351-386. 1890.

Darwin G. H., Phil. Trans. Roy. Soc., 1879 e 1882.

Chree, *On the equations of an isotropic Elastic Solid in Polar and Cylindrical Co-ordinates, their Solutions and Applications.* Trans. of the Cambridge Ph. S., **14**, Parte III, pag. 250-369. 1889.

** *Unters. ü. die Elasticität fes. isotr. Körper u. s. w.* Monatsber. d. Ak. d. Wiss. zu Berlin., 9 Jan. Juli 1873. *Gesamm. Werke*, pag. 248, 309.

*** *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico limitato da una o due superficie sferiche.* Annali R. Sc. Normale di Pisa, 1887.

**** *Assoc. fr. pour l'avanc. d. Sciences.* Compt. Rend. de la 14me Session, 2me partie, pag. 68-79, Grenoble, 1885. *Rend. Acc. Lincei*, anno 1886, pag. 461 e 586; anno 1889, pag. 189. *Atti R. Acc. dei Lincei*; memorie della classe di Sc. fis., anno 1891. *Nuovo Cimento*, anno 1893.

stamenti e parte delle forze oppure gli spostamenti tangenziali e le forze normali e viceversa *.

Le soluzioni semplici e dirette, che noi per sommi capi esporremo, sono dovute al prof. Almansi **.

Supporremo sempre nulle le forze di massa.

§ 1. Deformazione di una sfera isotropa per dati spostamenti in superficie. — Nell'assenza di forze di massa, le componenti u, v, w di spostamento sono funzioni biarmoniche nell'interno della sfera. Però conformemente a quanto fu fatto nel § 11 del Cap. 1°, si ponga

$$\left.\begin{aligned} u = (\rho_1^2 - a^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + U, v = (\rho_1^2 - a^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + V, \\ w = (\rho_1^2 - a^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + W, \end{aligned}\right\} (1)$$

---

* MARCOLONGO, *Rend. Acc. Lincei.* 1889, pag. 349. *Sulla deformazione di una sfera isotropa.* Annali di Matem. **23**, 1895. Vedi anche: J. HADAMARD, *Annales Sc. de l'Ecole normale supér.*, **18**, 1901.

** *Sulla deformazione della sfera elastica.* Mem. Acc. di Torino, **47**, 1897.

Un'altra soluzione del problema è esposta pure dal professor Lauricella nella tesi citata, Cap. IV.

Egli ha pure per altra via riottenute le soluzioni del professor Almansi ed ha trattato ancora il caso di un solido elastico indefinito limitato da una cavità sferica, *Ann. di Matem.*, **6**, 1901.

Gli stessi problemi sono risoluti, e con procedimento analogo a quello accennato alla fine del § precedente, dal prof. Tedone nella memoria citata alla nota della pag. 278. Vedi pure *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, **17**, 1903.

essendo φ, U, V, W funzioni uniformi insieme colle loro derivate prime, seconde, ecc. in tutta la sfera e tali che soddisfino la $\Delta_2 = 0$; ρ_1 è la distanza del punto $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nel quale si vuol calcolare la deformazione, dal centro della sfera. Poichè per $\rho_1 = a$ si ha

$$U = u; \text{ ecc.}$$

ed il valore u in superficie è noto, per dato del problema, così applicando la (20) del Cap. 1° si deduce

$$U = \frac{a^2 - \rho_1^2}{4\pi a} \int u \frac{d\sigma}{r^3}, \text{ ecc.} \tag{2}$$

in cui r è la distanza variabile del punto $M(x, y, z)$ della superficie dal punto M_1, di guisa che

$$r^2 = a^2 + \rho_1^2 - 2(x x_1 + y y_1 + z z_1).$$

La risoluzione del problema dipende dunque dalla conoscenza di φ.

Ora osserviamo che

$$\Delta_2 u = 6 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + 4 \left(x_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + y_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + z_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial z_1} \right);$$

ma

$$x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1}$$

quindi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + y_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + z_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial z_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} \right)$$

onde

$$\Delta_2 u = 4 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}\varphi + \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1}\right) \tag{2'}$$

e la prima delle equazioni indefinite dell'equilibrio diventa

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}\varphi + \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\omega^2}\Theta\right) = 0.$$

Otterremo altre due equazioni analoghe mutando x_1 in y_1 e z_1; la espressione entro parentesi è quindi costante e siccome nelle (1) φ non comparisce che per le sue derivate possiamo supporre nulla o compenetrata con φ tale costante; sicchè

$$\frac{1}{2}\varphi + \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\omega^2}\Theta = 0. \tag{3}$$

Ma dalle (1) stesse si calcola agevolmente Θ; e si trova

$$\Theta = 2\left(x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \ldots\right) + \frac{\partial U}{\partial x_1} + \ldots =$$

$$= 2\rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} + \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial W}{\partial z_1}.$$

Dalle (2) si ha poi

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{2x_1}{4\pi a}\int u \frac{d\sigma}{r^3} + \frac{a^2 - \rho_1^2}{4\pi a}\int \frac{3u(x - x_1)}{r^5} d\sigma$$

cioè

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{1}{4\pi a}\int \alpha\, u \frac{d\sigma}{r^5}, \text{ ecc.}$$

dove

$$\alpha = \{(5a^2 - \rho_1^2 - 4(x x_1 + \ldots))\, x_1 - 3(a^2 - \rho_1^2)\, x\}, \text{ ecc.}$$

Ponendo adunque

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi a}\int \frac{d\sigma}{r^5}(\alpha u + \beta v + \gamma w)$$

risulta

$$\Theta = 2\rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} + \Phi.$$

L'espressione di Φ si può semplificare. Diciamo s la grandezza dello spostamento in M, sulla superficie, formante un angolo ε col raggio ed un angolo ε_1 con OM_1; sia poi ϖ l'angolo di OM ed OM_1; si ha quindi

$$a\, s \cos\varepsilon = x\, u + \ldots$$

$$\rho_1\, s \cos\varepsilon_1 = x_1\, u + \ldots$$

se dunque si pone

$$r^5 H = \{(5a^2 - \rho_1^2 - 4a\rho_1 \cos\varpi)\rho_1 \cos\varepsilon_1 - 3(a^2 - \rho_1^2)\, a \cos\varepsilon\} \quad (6)$$

abbiamo

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi a}\int H s\, d\sigma. \quad (7)$$

La (3) diventa, dopo ciò

$$m\varphi + \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} = A\Phi \tag{8}$$

essendo

$$m = \frac{\omega^2}{\Omega^2 + \omega^2}, \quad A = -\frac{\Omega^2 - \omega^2}{2(\Omega^2 + \omega^2)};$$

$$0 < m < 1.$$

La (8) è un'equazione differenziale che s'integra facilmente e ci determinerà φ; ed il problema può riguardarsi come risoluto.

Prima di fare la integrazione è opportuno mostrare una proprietà della φ. Deriviamo la (8) rispetto x_1: otteniamo

$$m\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1}\right) = A\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$$

cioè

$$m\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + y_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} +$$

$$+ z_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial z_1} = A\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$$

e quindi

$$(m+1)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = A\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \tag{9}$$

cioè $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ soddisfa ad un'equazione analoga alla (8) e che differisce da questa perchè m è sostituito da $m+1$ e Φ da $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$.

Per integrare la (8) moltiplichiamola per ρ_1^{m-1} e con ciò si trasforma nella

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}(\rho_1^m \varphi) = A \rho_1^{m-1} \Phi;$$

integrando

$$\rho_1^m \varphi = f(\vartheta, \psi) + A \int_0^{\rho_1} \rho_1^{m-1} \Phi \, d\rho_1,$$

essendo f simbolo di funzione arbitraria delle altre due coordinate polari ϑ, ψ del punto M_1. Si deduce

$$\varphi = \frac{f(\vartheta, \psi)}{\rho_1^m} + \frac{A}{\rho_1^m} \int_0^{\rho_1} \rho_1^{m-1} \Phi \, d\rho_1.$$

La funzione φ deve essere sempre finita anche quando M_1, sul raggio OM_1, tende al centro e quindi ρ_1 a zero.

Ora:

$$\frac{1}{\rho_1^m} \int_0^{\rho_1} \rho_1^{m-1} \Phi \, d\rho_1 = \frac{1}{m} \Phi'$$

essendo Φ' un valore compreso tra il limite inferiore e superiore dei valori che Φ assume tra 0 e ρ_1; l'integrale dunque è finito per $\rho_1 = 0$.

Perchè φ resti finita, occorre dunque che $f = 0$ e però

$$\varphi = \frac{A}{\rho_1^m} \int_0^{\rho_1} \rho_1^{m-1} \Phi \, d\rho_1. \tag{10}$$

In virtù della proprietà dimostrata su φ ed espressa dalla (9) risulta

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{A}{\rho_1^{m+1}} \int_0^{\rho_1} \rho_1^m \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} d\rho_1$$

cioè, per la (7),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{A}{4\pi a} \int \left\{ \frac{1}{\rho_1^{m+1}} \int_0^{\rho_1} \rho_1^m \frac{\partial H}{\partial x_1} d\rho_1 \right\} s \, d\sigma; \tag{11}$$

sostituendo i valori (2) e (11) nelle (1) deduciamo le espressioni definitive per gli spostamenti

$$u = \frac{a^2 - \rho_1^2}{4\pi a} \int d\sigma \left\{ \frac{u}{r^3} - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2(\Omega^2 + \omega^2)} \frac{s}{\rho_1^{m+1}} \int_0^{\rho_1} \rho_1^m \frac{\partial H}{\partial x_1} d\rho_1 \right\} \tag{12}$$

e due formule analoghe per v e w *.

---

* Queste formule semplici si potrebbero agevolmente dedurre da quelle date per il primo dal prof. Cerruti.

§ **2. Deformazione della sfera per date forze agenti in superficie.** — Attesa la complicazione delle formule ci limiteremo soltanto a mostrare uno dei procedimenti più spediti per la risoluzione di questo problema.

Poniamo

$$\left.\begin{aligned} U &= x_1 X_x + y_1 Y_x + z_1 Z_x \\ V &= x_1 X_y + y_1 Y_y + z_1 Z_y \\ W &= x_1 X_z + y_1 Y_z + z_1 Z_z ; \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

se diciamo quindi come al solito L, M, N le componenti delle forze date in superficie, si ha, per $\rho_1 = a$,

$$a L = x_1 X_x + y_1 Y_x + z_1 Z_x , \text{ ecc.}$$

cioè

$$U = a L , \quad V = a M , \quad W = a N. \qquad (14)$$

Ora

$$\Delta_2 U = x_1 \Delta_2 X_x + \ldots$$

e ricordando le equazioni del § 5 del Cap. precedente:

$$\Delta_2 U = -\frac{2\mu}{E}\left(x_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} + y_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial y_1} + z_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial z_1}\right)$$

ed infine

$$\Delta_2 U = -\frac{2\mu}{E}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho_1 \frac{\partial P}{\partial \rho_1} - P\right) \qquad (15)$$

e due equazioni analoghe. Ma P, come Θ, è armonica entro la sfera e quindi anche $\rho_1 \frac{\partial P}{\partial \rho_1}$; e però

$$\Delta_4 U = 0.$$

Ora le (15) sono del tutto analoghe alle (2′) del § precedente; dunque posto

$$\left.\begin{aligned} U &= (\rho_1^2 - a^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + U_1 \\ V &= (\rho_1^2 - a^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + V_1 \\ W &= (\rho_1^2 - a^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + W_1, \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

si avrà analogamente alla (3)

$$\frac{1}{2}\varphi + \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} = -\frac{\mu}{2E}\left(\rho_1 \frac{\partial P}{\partial \rho_1} - P\right). \quad (17)$$

Ma le (13), in virtù delle equazioni indefinite di equilibrio, ci danno

$$P = \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial W}{\partial z_1}$$

quindi per le (16)

$$P = 2\rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1}. \quad (18)$$

Le $U_1, \ldots$ poi essendo funzioni armoniche che in superficie assumono valori eguali ad $U, \ldots$ cioè

eguali ad $a\,L, \ldots$ sono determinate dalle formule

$$U_1 = \frac{a^2 - \rho_1^2}{4\pi} \int \frac{L\,d\sigma}{r^3}, \text{ ecc.} \tag{19}$$

La espressione

$$\Phi = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \ldots \tag{20}$$

sarà dunque nota; e con un calcolo analogo a quello del § precedente risulta

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int H F\,d\sigma \tag{21}$$

essendo F la grandezza della forza data in superficie ed H la stessa quantità (6) ma relativa alle forze.

Sostituendo ora il valore (18) di P nella (17), dopo una facile riduzione si trova

$$\frac{E}{2\mu}\varphi + \frac{E}{\mu}\rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} + \rho_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho_1^2} = \frac{1}{2}\left(\rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_1} - \Phi\right), \tag{22}$$

equazione differenziale che ci farà conoscere φ. La sua integrazione si può ricondurre a quella della (8). Si determinino infatti due numeri m ed n tali che

$$m\,n = \frac{E}{2\mu}, \quad 1 + m + n = \frac{E}{\mu}$$

e la (22) equivarrà alle due altre

$$m\psi + \rho_1 \frac{\partial \psi}{\partial \rho_1} = \frac{1}{2}\left(\rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_1} - \Phi\right)$$

$$n\varphi + \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} = \psi;$$

la prima delle quali ci determinerà ψ applicando la (10) e quindi, sempre colla (10), otterremo φ. Ma per brevità non effettueremo i calcoli e riterremo note le $U, \ldots$ Mostriamo infine come si possano determinare gli spostamenti.

Ricordando le espressioni delle componenti speciali di pressione e sostituendo nelle (13) si ha

$$U = \left(\lambda \frac{1-2\varkappa}{E} P - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) x_1 -$$

$$- \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\right) y_1 - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) z_1, \text{ ecc.}$$

Posto adunque

$$A = \frac{\lambda}{\mu} \frac{1-2\varkappa}{E} P - \frac{1}{\mu} U, \text{ ecc.} \ldots \qquad (23)$$

risultano le equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&2x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_1\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\right) + z_1\left(\frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) = A \\
&x_1\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\right) + 2y_1 \frac{\partial v}{\partial y_1} + z_1\left(\frac{\partial w}{\partial y_1} + \frac{\partial v}{\partial z_1}\right) = B \\
&x_1\left(\frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) + y_1\left(\frac{\partial w}{\partial y_1} + \frac{\partial v}{\partial z_1}\right) + 2z_1 \frac{\partial w}{\partial z_1} = C
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

in cui le A, B, C date dalle (23) sono da riguardarsi come note.

Dalle (24) a loro volta si deduce

$$\frac{\partial C}{\partial y_1} - \frac{\partial B}{\partial z_1} = x_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial T_1}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial T_1}{\partial z_1} = \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial \rho_1}$$

donde

$$T_1 = \int_0^{\rho_1} \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\partial C}{\partial y_1} - \frac{\partial B}{\partial z_1} \right) d\rho_1 \,, \text{ ecc.}$$

Potremo dunque riguardare come note le rotazioni: ma le (24) possono anche scriversi così

$$2\rho_1 \frac{\partial u}{\partial \rho_1} + z_1 T_2 - y_1 T_3 = A, \text{ ecc.} \ldots$$

e quindi con una nuova integrazione rispetto ρ_1 conosceremo u, v, w. Eseguendo i calcoli, che qui abbiamo solamente accennato, si possono porre le espressioni di u, v, w sotto forma relativamente semplice *.

---

* Per lo sviluppo di questi calcoli si vegga la memoria del prof. Almansi e quella recente del prof. Lauricella, *Nuovo Cimento*, **5**; 1903.

Per ciò che riguarda poi gli sviluppi in serie delle componenti u, v, w, oltre i lavori citati del Lauricella e la mia memoria, citata a pag. 281, si possono consultare numerosi lavori del sig. Chree e l'eccellente trattato del sig. Love, Capo x. Ci è impossibile darne anche un cenno fugace, tali metodi poggiando su proprietà delle funzioni sferiche.

La applicazione dei metodi Betti-Cerruti esige lo studio delle proprietà delle deformazioni simmetriche rispetto ad un asse e quindi delle funzioni potenziali coniugate del Beltrami, già accennate nelle memorie del prof. Cerruti e nella mia memoria degli *Ann. di Mat.* le quali hanno pure applicazione al caso del diedro, triedro, lastra di spessore finito, ecc.

CAPITOLO NONO.

IL PROBLEMA DI SAINT-VENANT SULLA DEFORMAZIONE DELLE ASTE CILINDRICHE *

§ 1. Posizione del problema. — Gli esempi svolti nei capitoli precedenti hanno già dato una idea delle gravi difficoltà che occorre superare per studiare la deformazione di un solido qualunque; difficoltà tanto gravi che all'infuori dei casi che abbiamo studiato, pochi altri casi generali si conoscono in cui l'integrazione delle equazioni della elasticità sia stata ottenuta.

* Su questo capitolo vedi CLEBSCH, *Theorie der Elasticität fester Körper*, 1862, § 22, pag. 70. LOVE, l. c., Cap. VI. L'opera del Love è ricca di citazioni bibliografiche alle quali rimandiamo il lettore. Vedi ancora le due grandi memorie del SAINT-VENANT, *Mém. sur la torsion des prismes*, etc. Mem. d. savants étrangers, **14**; 1855. *Mém. sur la flexion*, etc. Journal de Liouville, **1**; 1856. Nello sviluppo della soluzione seguiamo, con qualche piccola variante, il Clebsch. Vedi pure ALMANSI, *Introduzione alla scienza delle costruzioni*. Torino, 1901.

Dal punto di vista dei risultati pratici sarebbe assai importante lo studio della deformazione di quei solidi che si presentano nelle costruzioni; cioè aste, colonne cilindriche o prismatiche, ecc. Si può in questi casi prescindere dalle forze di massa che, per lo più, si riducono al peso e si può anche supporre la superficie convessa del cilindro non sollecitata da forze (oppure da forze trascurabili): ma supporre solamente il cilindro soggetto a forze distribuite sulle due basi.

Il problema dunque che sarebbe utile risolvere è il seguente:

studiare la deformazione di un cilindro omogeneo retto nella ipotesi che siano nulle le forze di massa e che sia sollecitato da forze qualunque distribuite sulle due basi.

L'asse z sia la congiungente i centri di massa delle varie sezioni rette (nello stato naturale) e il centro delle coordinate sia su una delle due basi ($z=0$); l'altra corrisponda a $z=l$. Supporremo inoltre, per semplicità di calcolo, il cilindro isotropo per quanto i procedimenti che svilupperemo siano del tutto generali.

Dovremmo occuparci della ricerca di u, v, w (componenti di spostamento). Le equazioni indefinite del problema (dalle quali poi si sono ricavate le equazioni del Cap. 4°, § 5) sono

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0, \text{ ecc.} \qquad (1)$$

E nel caso dei corpi isotropi abbiamo inoltre

(for. 12. Cap. 4°)

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= -\frac{E}{1+\varkappa}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\varkappa}{1-2\varkappa}\Theta\right);\\
Y_y &= -\frac{E}{1+\varkappa}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\varkappa}{1-2\varkappa}\Theta\right)\\
Z_z &= -\frac{E}{1+\varkappa}\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\varkappa}{1-2\varkappa}\Theta\right)\\
Y_z &= -\frac{E}{2(1+\varkappa)}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\
Z_x &= -\frac{E}{2(1+\varkappa)}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
X_y &= -\frac{E}{2(1+\varkappa)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Diciamo L_0, M_0, N_0 le componenti delle forze, per unità d'area, distribuite sulla base inferiore; L_1, M_1, N_1 quelle della base superiore: poichè sulla prima si ha

$$\cos(n,x)=\cos(n,y)=0\,,\quad \cos(n,z)=1$$

e sulla seconda

$$\cos(n,x)=\cos(n,y)=0\,,\quad \cos(n,z)=-1\,;$$

avremo

$$\left.\begin{aligned}
L_0 &= X_z\,;\quad M_0=Y_z\,;\quad N_0=Z_z\quad (z=0)\\
L_1 &= -X_z\,;\quad M_1=-Y_z\,;\quad N_1=-Z_z\quad (z=l).
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Finalmente sulla superficie convessa, libera da

forze, avendosi $\cos(n, z) = 0$, dovremo avere

$$\left.\begin{aligned} X_x \cos(n, x) + Y_x \cos(n, y) &= 0; \\ X_y \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) &= 0; \\ X_z \cos(n, x) + Y_z \cos(n, y) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

§ 2. **Ipotesi speciale sulle forze interne; problema di Saint-Venant.** — Posto così in generale il problema non si sa risolvere. Si capisce però che specializzando in modo conveniente la distribuzione delle forze sulle due basi, si avrà una speciale deformazione ora è possibile scegliere tale distribuzione in modo da poter facilmente assegnare la deformazione corrispondente ed è merito del Saint-Venant di aver assegnato una serie di casi particolari, sopratutto interessanti per la pratica, in cui è possibile determinare una speciale deformazione delle aste cilindriche. Osserviamo che le X_x, Y_x, Y_y figurano soltanto nelle equazioni (4) valide sulla superficie convessa del cilindro. Ora si vuol vedere se è possibile una deformazione per la quale le

$$X_x = Y_x = Y_y = 0 \quad (5)$$

siano soddisfatte al contorno e nell'interno di tutto il cilindro; cercare poscia di determinarla e infine ricercare quale deve essere la distribuzione delle forze sulle due basi. Questo metodo che assegna a priori alcune proprietà delle componenti di pressione dicesi metodo *semi-inverso*. Il Saint-Venant ha effettivamente mostrato che un tale problema è possibile ed ha di più determinata e studiata la corrispon-

dente deformazione; però il problema così specializzato dicesi *problema di Saint-Venant.*

Le (5) si possono interpretare così: per un punto interno del cilindro conduciamo un elemento piano parallelo al piano yz; esso sopporta una pressione di componenti X_x, Y_x, Z_x (per unità d'area); le prime due, per le (5), essendo nulle, questo elemento è soggetto ad una sola pressione tangenziale; lo stesso dicasi per un elemento parallelo ad xz ed in generale per ogni elemento parallelo all'asse del cilindro. Supponendo dunque il cilindro composto da tante fibre parallele all'asse, queste non risentono che pressioni tangenziali.

Nella ipotesi (5) le equazioni indefinite di equilibrio diventano

$$\frac{\partial X_z}{\partial z}=0,\ \frac{\partial Y_z}{\partial z}=0,\ \frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0. \quad (6)$$

Le equazioni (4) valide sulla superficie convessa del cilindro si riducono all'unica

$$X_z \cos(n, x) + Y_z \cos(n, y) = 0. \qquad (7)$$

Supporremo inoltre, come già s'è detto, che un certo sistema di forze solleciti la base superiore del cilindro (quella corrispondente a $z = l$) e quindi

$$L_1 = -X_z,\ M_1 = -Y_z;\ N_1 = -Z_z \quad (z = l).$$

Non si conoscono, punto per punto, le L_1, M_1, N_1, ma solamente le coordinate di questo sistema di forze, che indicheremo colle solite notazioni della

meccanica, di guisa che avremo

$$\left.\begin{array}{c} R_x = -\int X_z \, d\sigma, \; R_y = -\int Y_z \, d\sigma, \\ R_z = -\int Z_z \, d\sigma \\ M_x = \int (z\, Y_z - y\, Z_z)\, d\sigma; \text{ ecc.} \end{array}\right\} (8)$$

Supporremo infine la base inferiore ($z = 0$) libera da forze; fisso il punto origine O: cioè

$$u = v = w = 0$$

per

$$x = y = z = 0;$$

inoltre i punti dell'asse x si spostino ma restino sempre sull'asse x; un punto O' su questo asse ed infinitamente prossimo ad O, avendo per coordinate $d\,x$, 0, 0 avrà per componenti del suo spostamento secondo y e z:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 d\,x, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 d\,x$$

dunque sarà

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

per $x = y = z = 0$; supporremo infine che l'asse y si sposti restando sempre nel piano $x\,y$: un punto infinitamente prossimo ad O su quest'asse avrà nulla la componente del suo spostamento secondo z cioè $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$: dunque, senza specializzare in

nulla il problema, possiamo dire che per $x = y = z = 0$ si ha

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \qquad (9)$$

§ 3. Equazioni differenziali per gli spostamenti. — Le equazioni (5) e (6) si trasformano facilmente in equazioni differenziali per gli spostamenti, che vogliamo anzitutto stabilire.

Dalle (2), essendo $X_x = Y_y = 0$, risulta

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\varkappa}{1-2\varkappa}\Theta$$

cioè

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\varkappa\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (10)$$

La condizione $Y_x = 0$ ci dà, a sua volta,

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (11)$$

Passiamo ora alle (6): la prima e seconda, in virtù dei valori (2) ci danno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} = 0. \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} = 0. \qquad (13)$$

La terza delle (6) è equivalente (vedi § 5 del Cap. 4.°) alla

$$\Delta_2 w + \frac{1}{1-2\varkappa}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = 0:$$

ma

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (1 - 2\varkappa)\frac{\partial w}{\partial z},$$

in virtù delle (10): quindi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \tag{14}$$

Dunque le componenti di spostamento debbono soddisfare alle cinque equazioni differenziali (10) sino a (14); ciò che in generale non è possibile solo che per forme speciali di u, v, w. Ed è appunto quello che noi ora mostreremo.

§ **4. Ricerca degli spostamenti.** — Dalle cinque equazioni stabilite, combinate in modo opportuno, possiamo eliminare u e v.

Deriviamo infatti le (12), (13), (14) rispetto x, y, z e sottragghiamo la terza dalla somma delle due prime. Avremo

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - 2\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = 0.$$

e questa per la (10), notando che $1 + \varkappa > 0$, ci dà

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = 0.$$

Deriviamo la (12) rispetto y, la (13) rispetto x, sommando e tenendo presente la (11) risulta

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 0;$$

derivando invece la (12) rispetto x, la prima delle (10) rispetto z due volte e sottraendo si ha

$$-\varkappa \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} = 0$$

cioè

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} = 0.$$

Operando in modo analogo sulla (13) si ha pure

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} = 0.$$

Sicchè infine abbiamo

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} = \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = 0. \quad (15)$$

Ponendo

$$\frac{\partial w}{\partial z} = w_1$$

abbiamo

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} = 0,$$

la prima delle quali esige che w_1 sia una funzione lineare di z e le altre tre che w_1 sia funzione lineare di x ed y: dunque

$$\frac{\partial w}{\partial z} = a + a_1 x + a_2 y + z(b + b_1 x + b_2 y), \quad (16)$$

essendo le a e b costanti. Allora le (10) ci faranno conoscere $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ e quindi con altre tre integrazioni conosceremo u, v, w.

Intanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\varkappa \{a + a_1 x + a_2 y + z(b + b_1 x + b_2 y)\}$$

mentre la (12) ci dà

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -a_1 - b_1 z,$$

cioè u è di terzo grado in z. Integrando si ha

$$u = -\varkappa \left\{a x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + a_2 x y + \right.$$

$$\left. + z \left(b x + \frac{1}{2} b_1 x^2 + b_2 x y\right)\right\} + \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3,$$

essendo α, β, γ, δ funzioni della sola y; e poichè da questa si trae

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2\gamma + 6\delta z$$

così concludiamo che

$$\gamma = -\frac{1}{2} a_1 ; \quad \delta = -\frac{1}{6} b_1$$

e però

$$u = -\varkappa \left\{ a\,x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + a_2\,x\,y + \right.$$

$$\left. + z\,(b\,x + \frac{1}{2} b_1 x^2 + b_2\,x\,y) \right\} +$$

$$+ \alpha + \beta\,z - \frac{1}{2} a_1 z^2 - \frac{1}{6} b_1 z^3.$$

Mutando x in y, a_1 in a_2, b_1 in b_2, α in α', ecc.... otterremo v, cioè

$$v = -\varkappa \left\{ a\,y + a_1\,x\,y + \frac{1}{2} a_2 y^2 + \right.$$

$$\left. + z\,(b\,y + b_1\,x\,y + \frac{1}{2} b_2 y^2) \right\} +$$

$$+ \alpha' + \beta' z - \frac{1}{2} a_2 z^2 - \frac{1}{6} b_2 z^3,$$

in cui α' e β' sono funzioni della sola x. Le espressioni così trovate per u e v soddisfano certamente le (10), (12) e (13). Perchè soddisfino anche la (11) è necessario e basta che

$$-\varkappa\,\{x\,(a_2 + b_2\,z) + y\,(a_1 + b_1\,z)\} +$$

$$+ \frac{d\,\alpha}{d\,y} + \frac{d\,\alpha'}{d\,x} + z\left(\frac{d\,\beta}{d\,y} + \frac{d\,\beta'}{d\,x}\right) = 0$$

la quale dovendo valere qualunque sia z si spezza

in queste altre due

$$\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\alpha'}{dx} - \varkappa(a_2 x + a_1 y) = 0$$

$$\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\beta'}{dx} - \varkappa(b_2 x + b_1 y) = 0.$$

Ognuna di queste due poi a sua volta si spezza in altre due che si ottengono ponendo separatamente eguale a costante la parte dipendente dalla sola x e quella dalla sola y; quindi

$$\frac{d\alpha'}{dx} = -a_0 + \varkappa a_2 x; \quad \frac{d\alpha}{dy} = a_0 + \varkappa a_1 y, \text{ ecc.}$$

donde

$$\alpha' = a'' - a_0 x + \frac{1}{2}\varkappa a_2 x^2$$

$$\alpha = a' + a_0 y + \frac{1}{2}\varkappa a_1 y^2,$$

ed analogamente

$$\beta' = b'' - b_0 x + \frac{1}{2}\varkappa b_2 x^2$$

$$\beta = b' + b_0 y + \frac{1}{2}\varkappa b_1 y^2,$$

le a_0, a', a'', b', b'' essendo costanti arbitrarie.

Se poi notiamo che nell'origine $u = v = 0$, si deduce subito $a' = a'' = 0$ ed essendo ancora nel-

l'origine $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, si ha $a_0 = 0$. Abbiamo dunque:

$$u = -\varkappa \left\{ a x + a_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + a_2 x y + \right.$$

$$\left. + z \left(b x + b_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + b_2 x y \right) \right\} +$$

$$+ z (b' + b_0 y) - \frac{1}{2} a_1 z^2 - \frac{1}{6} b_1 z^3 ,$$

$$v = -\varkappa \left\{ a y + a_1 x y + a_2 \frac{y^2 - x^2}{2} + \right.$$

$$\left. + z \left(b y + b_1 x y + b_2 \frac{y^2 - x^2}{2} \right) \right\} +$$

$$+ z (b'' - b_0 x) - \frac{1}{2} a_2 z^2 - \frac{1}{6} b_2 z^3 \quad *.$$

Passiamo ora alla ricerca di w. Integrando la (16) si ha

$$w = (a + a_1 x + a_2 y) z +$$

$$+ \frac{1}{2} (b + b_1 x + b_2 y) z^2 + F(x, y),$$

essendo F una funzione incognita di x ed y. Con i precedenti valori di u, v, w siamo certi di sod-

* Il calcolo di u e v potrebbe farsi direttamente e alquanto più speditamente, osservando che le (10) e (11) esprimono che $u + i v$ è funzione della variabile complessa $x + i y$ e di z. Vedi: POINCARÉ, *Leçons sur la théorie de l'élasticité.* Paris, 1892, pag. 169. CESÀRO, l. c., § XVI.

disfare alle equazioni (10), (11), (12) e (13). Resta dunque la sola (14) la quale si trasforma nella

$$2(b + b_1 x + b_2 y) + \Delta_2 F = 0.$$

Possiamo decomporre la F in due parti una delle quali abbia il Δ_2 eguale a $-2(b + b_1 x + b_2 y)$; se questa parte è funzione intera di x ed y sarà di terzo grado al massimo: poniamo dunque

$$F = \alpha x^2 + 2\beta x y + \gamma y^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^2 y + \\ + \lambda x y^2 + \mu y^3 + W_1$$

le α, $\beta \ldots \mu$ essendo costanti arbitrarie. Risulta

$$\Delta_2 F = \Delta_2 W_1 + 2\alpha + 2\gamma + x(6\delta + 2\lambda) + \\ + y(2\varepsilon + 6\mu);$$

se quindi poniamo

$$\beta = 0, \quad \alpha = \gamma = -\frac{1}{2} b$$

$$\delta = \mu = 0, \quad \lambda = -b_1, \quad \varepsilon = -b_2$$

risulterà

$$\Delta_2 W_1 = 0$$

e

$$w = (a + a_1 x + a_2 y) z + \frac{1}{2}(b + b_1 x + b_2 y) z^2 - \\ - \left\{ b \frac{x^2 + y^2}{2} + b_1 x y^2 + b_2 x^2 y \right\} + W_1 .$$

Per poter inoltre far sì che w soddisfi alle condizioni (9) conviene sostituire alla W_1 la

$$W = W_1 + b + b' x + b'' y ;$$

sarà quindi

$$\Delta_2 W = 0 ,$$

e per le (9):

$$b = (W)_0 ; \qquad b' = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0 ; \qquad b'' = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 .$$

Con questo abbiamo soddisfatto a tutte le equazioni differenziali. La W è una funzione armonica a due variabili; cioè armonica in ogni sezione retta del cilindro. Ma deve inoltre soddisfare ad una condizione al contorno. Infatti sulla superficie convessa del cilindro, e quindi sul contorno di ogni sezione retta, deve valere la (7) che equivale alla

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \cos(n, y) = 0,$$

cioè, con un calcolo facile,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dW}{dn} = {} & b(1+\varkappa)\left(x\frac{dx}{dn} + y\frac{dy}{dn}\right) - b_0\left(y\frac{dx}{dn} - x\frac{dy}{dn}\right) + \\ & + b_1\left\{\frac{\varkappa x^2 + (2-\varkappa) y^2}{2}\frac{dx}{dn} + (2+\varkappa) x y \frac{dy}{dn}\right\} + \\ & + b_2\left\{(2+\varkappa) x y \frac{dx}{dn} + \frac{\varkappa y^2 + (2-\varkappa) x^2}{2}\frac{dy}{dn}\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

e però la funzione armonica W è determinata (a meno di una costante) dai valori della sua derivata normale al contorno.

Ora deve intanto aversi

$$\int \frac{dW}{dn} ds = 0$$

s essendo il contorno della sezione retta. Notiamo che applicando il lemma di Gauss e tenendo presente che i centri di massa delle varie sezioni stanno sull'asse z, si ha

$$\int x \frac{dx}{dn} ds = \int y \frac{dy}{dn} ds = -\int d\sigma$$

$$\int x^2 \frac{dx}{dn} ds = -2 \int x \, d\sigma = 0$$

$$\int y^2 \frac{dx}{dn} ds = \int xy \frac{dx}{dn} ds = \ldots = 0.$$

Se quindi integriamo la (17) si ottiene

$$b = 0.$$

Dunque la W, armonica in ogni sezione retta, soddisfa al contorno la

$$\left.\begin{aligned} \frac{dW}{dn} &= b_0 \left(x \frac{dy}{dn} - y \frac{dx}{dn} \right) + \\ &+ b_1 \left\{ \frac{\varkappa x^2 + (2-\varkappa) y^2}{2} \frac{dx}{dn} + (2+\varkappa) x y \frac{dy}{dn} \right\} + \\ &+ b_2 \left\{ (2+\varkappa) x y \frac{dx}{dn} + \frac{\varkappa y^2 + (2-\varkappa) x^2}{2} \frac{dy}{dn} \right\}; \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

e però la determinazione della W dipende dalla forma del contorno.

Conviene porre

$$W = b_0 B_0 + b_1 B_1 + b_2 B_2 \tag{19}$$

essendo le B_0, B_1, B_2 armoniche e soddisfacendo al contorno rispettivamente alle

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d B_0}{d n} &= x \frac{d y}{d n} - y \frac{d x}{d n} \\
\frac{d B_1}{d n} &= \frac{\varkappa x^2 + (2 - \varkappa) y^2}{2} \frac{d x}{d n} + \\
&\quad + (2 + \varkappa) x y \frac{d y}{d n} \\
\frac{d B_2}{d n} &= (2 + \varkappa) x y \frac{d x}{d n} + \\
&\quad + \frac{\varkappa y^2 + (2 - \varkappa) x^2}{2} \frac{d y}{d n}.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Riepilogando dunque possiamo dire che, come si era asserito, si può soddisfare (e in modo unico) a tutte le condizioni imposte, ponendo

$$\left.\begin{aligned}
u = &- \varkappa \left(a x + a_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + a_2 x y \right) - \\
&- \varkappa z \left(b_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + b_2 x y \right) + b_0 y z + \\
&+ z \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_0 - \frac{1}{2} a_1 z^2 - \frac{1}{6} b_1 z^3,
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$
\left.\begin{aligned}
v = & -\varkappa\left(a\,y + a_1\,x\,y + a_2\,\frac{y^2 - x^2}{2}\right) - \\
& -\varkappa\,z\left(b_1\,x\,y + b_2\,\frac{y^2 - x^2}{2}\right) - b_0\,x\,z + \\
& + z\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 - \frac{1}{2}\,a_2 z^2 - \frac{1}{6}\,b_2\,z^3\,, \\
w = & \; z\,(a + a_1\,x + a_2\,y) + \\
& + \frac{z^2}{2}\,(b_1\,x + b_2\,y) - b_1\,x\,y^2 - b_2\,x^2\,y + \\
& + W - x\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0 - y\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 .
\end{aligned}\right\} \quad (21)
$$

Si calcolano ora subito le tre componenti speciali di pressione che non sono nulle, cioè

$$
\left.\begin{aligned}
X_z = & -\frac{E}{2\,(1+\varkappa)}\left\{ b_0\,y - (2+\varkappa)\,b_2\,x\,y - \right. \\
& \left. - b_1\,\frac{\varkappa\,x^2 + (2-\varkappa)\,y^2}{2} + \frac{\partial W}{\partial x}\right\} \\
Y_z = & -\frac{E}{2\,(1+\varkappa)}\left\{ -b_0\,x - (2+\varkappa)\,b_1\,x\,y - \right. \\
& \left. - b_2\,\frac{\varkappa\,y^2 + (2-\varkappa)\,x^2}{2} + \frac{\partial W}{\partial y}\right\} \\
Z_z = & -E\,\{a + a_1\,x + a_2\,y + z\,(b_1\,x + b_2\,y)\} \\
& X_x = Y_y = X_y = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (22)
$$

La soluzione trovata dà per le componenti di spostamento dei polinomi di terzo grado in x, y, z contenenti le sei costanti arbitrarie

$$a,\ a_1,\ a_2,\ b_0,\ b_1,\ b_2.$$

Perchè dunque la ricerca sia completa occorre far vedere come le condizioni alla base superiore, cioè le (8), permettano di individuare queste costanti.

Riferiamo perciò i punti della base agli assi principali d'inerzia baricentrici e diciamo α e β i raggi principali d'inerzia relativi agli assi y ed x e σ l'area: quindi

$$\int x\, d\sigma = \int y\, d\sigma = \int x\, y\, d\sigma = 0$$

$$\int x^2\, d\sigma = \sigma\, \alpha^2, \quad \int y^2\, d\sigma = \sigma\, \beta^2.$$

Sostituendo le (22) nelle (8) e tenendo presenti le posizioni precedenti, si ha

$$R_x = \frac{E}{2(1+\varkappa)} \left\{ \int \frac{\partial W}{\partial x}\, d\sigma - \frac{\varkappa}{2} b_1\, \sigma\, \alpha^2 - \frac{2-\varkappa}{2} b_1\, \sigma\, \beta^2 \right\}$$

$$R_y = \frac{E}{2(1+\varkappa)} \left\{ \int \frac{\partial W}{\partial y}\, d\sigma - \frac{\varkappa}{2} b_2\, \sigma\, \beta^2 - \frac{2-\varkappa}{2} b_2\, \sigma\, \alpha^2 \right\}$$

$$R_z = E\, a\, \sigma$$

$$M_x = -\, l\, R_y + E\, \sigma\, (a_2\, \beta^2 + l\, b_2\, \beta^2)$$

$$M_y = l\, R_x - E\, \sigma\, (a_1\, \alpha^2 + l\, b_1\, \alpha^2)$$

$$M_z = \frac{E}{2(1+\varkappa)} \left\{ -\, b_0\, (\alpha^2 + \beta^2) + \right.$$

$$+\frac{b_1}{2}\int[(2-\varkappa)\,y^3-(4+\varkappa)\,x^2\,y]\,d\sigma+$$

$$+\frac{b_2}{2}\int[(2-\varkappa)\,x^3-(4+\varkappa)\,x\,y^2]\,d\sigma+$$

$$+\int\left(x\frac{\partial W}{\partial y}-y\frac{\partial W}{\partial x}\right)d\sigma\Big\}.$$

Queste espressioni si possono notevolmente semplificare. Infatti osserviamo che

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial W}{\partial y}\right),$$

quindi

$$\int\frac{\partial W}{\partial x}\,d\sigma=-\int x\frac{d\,W}{d\,n}\,d\,s\,;$$

sostituendo a secondo membro il valore (18) e notando che si ha

$$\int x^3\frac{d\,y}{d\,n}\,d\,s=\int x\,y\,\frac{d\,x}{d\,n}\,d\,s=\int x^2\,y\,\frac{d\,x}{d\,n}\,d\,s=0$$

$$\int x^3\frac{d\,x}{d\,n}\,d\,s=-\,3\,\sigma\,\alpha^2;\int x\,y^2\,\frac{d\,x}{d\,n}\,d\,s=-\,\sigma\beta^2,\ \text{ecc.},$$

risulta

$$\int\frac{\partial W}{\partial x}\,d\sigma=\frac{b_1}{2}\,\sigma\,\{(4+5\,\varkappa)\,\alpha^2+(2-\varkappa)\,\beta^2\}$$

e in modo analogo si trova la formula che si ottiene da questa scambiando x in y; onde

$$R_x=E\,\sigma\,\alpha^2\,b_1\,,\ R_y=E\,\sigma\,\beta^2\,b_2\,,\ R_z=E\,a\,\sigma$$

$$M_x=E\,\sigma\,\beta^2\,a_2,\quad M_y=-\,E\,\sigma\,\varkappa^2\,a_1. \qquad (23)$$

Non sembra invece facile trovare una espressione semplice per M_z, la cui determinazione dipende da quella della funzione W.

Appare ad ogni modo chiaro che la conoscenza delle forze, che sollecitano la base superiore, determina in modo assai semplice le costanti; infatti le (23) ci determineranno a, a_1, a_2, b_1, b_2 e finalmente la espressione di M_z, lineare in b_0, b_1, b_2 determinerà b_0.

§ 5 Analisi della deformazione. Estensione semplice. Abbiamo già osservato che la soluzione espressa dalle (21) contiene linearmente sei costanti arbitrarie indipendenti; quindi la deformazione può riguardarsi come risultante di altre sei che si ottengono supponendo volta a volta nulle tutte le costanti all'infuori di una sola. Ma è facile vedere che la deformazione dipendente dalla sola costante a_1 non differisce sostanzialmente da quella dipendente dalla sola a_2; infatti si passa dall'una all'altra scambiando x in y ed u con v. Così dicasi per b_1 e b_2; di guisa che in sostanza abbiamo da studiare quattro modi semplici di deformazione.

Supponiamo anzitutto nulle tutte le costanti meno a; avremo

$$u = -\varkappa a x; \quad v = -\varkappa a y; \quad w = a z$$

$$\Theta = (1 - 2\varkappa) a.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\varkappa a; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\varkappa a; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = a.$$

Le forze sulla base superiore si riducono alla sola

$$R_z = E a \sigma.$$

La deformazione si riduce ad una estensione semplice longitudinale accompagnata da una contrazione laterale uniforme, prodotta da una forza applicata alla base superiore normalmente a questa in modo da stirare il cilindro ($a > 0$). Ogni fibra nel senso longitudinale si allunga nel rapporto di 1 a $1 + a$; si contrae trasversalmente nel rapporto di 1 ad $1 - a\varkappa$; ogni fibra rettilinea resta rettilinea dopo la deformazione; ogni sezione piana resta piana. La deformazione è indipendente dalla forma della sezione retta.

§ **6. Flessione uniforme.** — Supporremo nulle tutte le costanti eccetto a_1. Le (21) e (23) ci danno

$$u = -\frac{1}{2}\varkappa a_1 (x^2 - y^2) - \frac{1}{2} a_1 z^2$$

$$v = -\varkappa a_1 x y; \quad w = a_1 x z$$

$$\Theta = (1 - 2\varkappa) a_1 x; \quad M_y = -E \sigma \alpha^2 a_1$$

mentre le $R_x, \ldots$ sono tutte nulle. La base superiore è dunque sollecitata da una coppia situata nel piano $x z$. Per avere una immagine di questa deformazione ricercheremo come si trasformano le fibre parallele all'asse z e le sezioni rette del cilindro. Il procedimento generale da seguirsi è il seguente: per un punto x, y della base inferiore si conduca una fibra parallela all'asse z; un punto qualunque variabile su questa sarà individuato

dalla propria z. Dopo la deformazione le coordinate di questo punto siano x', y', z' e sarà

$$x' = x + u,\ y' = y + v,\ z' = z + w;$$

eliminando z tra queste equazioni otterremo le equazioni della curva nella quale si trasforma la fibra.

Notando invece che una sezione retta è definita dalla z, eliminando tra le stesse le x ed y, otterremo una equazione in x', y', z', in cui figura z come parametro costante, che è l'equazione della superficie trasformata della sezione retta. Applichiamo queste considerazioni generali al nostro caso: avremo

$$x' = x - \frac{1}{2} \times a_1 (x^2 - y^2) - \frac{1}{2} a_1 z^2$$

$$y' = y - \times a_1 x y,\quad z' = z + a_1 x z,$$

ed eliminando z si ha

$$x' = x - \frac{1}{2} \times a_1 (x^2 - y^2) - \frac{1}{2} a_1 \frac{z'^2}{(1 + a_1 x)^2}$$

$$y' = y (1 - \times a_1 x) = \text{cost.}$$

Dunque queste fibre restano in piani paralleli al piano $x z$ e si incurvano secondo parabole di 2° grado.

L'asse z cioè la fibra centrale si trasforma nella

$$x' = -\frac{1}{2} a_1 z'^2,\ y' = 0,$$

cioè in una parabola contenuta nel piano xz e tangente all'asse z; se, com'è lecito, si suppone $a_1 > 0$ tutte le parabole presentano la concavità verso le x negative e le fibre s'inflettono tutte allo stesso modo: di qui il nome di *flessione* dato a questa deformazione. Il piano xz, che contiene la coppia, dicesi *piano di flessione*. L'estremità dell'asse $(0, 0, l)$ si abbassa di $\frac{1}{2} a_1 l^2$ e questa quantità dicesi *saetta di flessione*.

Essa è in generale molto piccola; e poichè x' è dello stesso ordine di a_1, la parabola differirà assai poco dal cerchio

$$a_1 z'^2 + a_1\left(x' + \frac{1}{a_1}\right)^2 = \frac{1}{a_1}$$

che ha il centro sull'asse x e raggio $-\frac{1}{a_1}$; per questo la deformazione prende anche il nome di *flessione uniforme o circolare*.

Eliminando x ed y dalle equazioni precedentemente stabilite, cioè sostituendo nella terza ad x il valore ricavato dalla prima, si ottiene, trascurando i termini in a_1^2,

$$z' = z\,(1 + a_1 x');$$

cioè la sezione $z =$ cost. resta piana, ma si inclina sulla prima; questo piano taglia l'asse x in un punto di ascissa $-\frac{1}{a_1}$ e passa dunque pel centro del circolo in cui si trasforma l'asse z; e poichè le fibre perpendicolari all'asse z e contenute nel

piano xz restano rettilinee così esse si inclineranno sull'asse x restando nel piano xz e normali all'arco circolare in cui si trasforma l'asse z.

Infine gli elementi pei quali $x < 0$ si contrarranno; gli altri si dilateranno.

Possiamo infine osservare che la costante a_2 definirà pure una flessione circolare nel piano yz e che entrambe queste deformazioni non dipendono dalla forma della sezione retta.

§ **7. Flessione non uniforme.** — Supponendo nulle tutte le costanti meno b_1 e ponendo

$$m = \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0, \quad p = \left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0$$

le formule generali ci danno

$$u = b_1 z \left\{ m - \frac{\varkappa}{2}(x^2 - y^2) - \frac{1}{6} z^2 \right\}$$

$$v = b_1 z (p - \varkappa x y)$$

$$w = \frac{1}{2} b_1 x z^2 - b_1 x y^2 + b_1 (B_1 - m x - p y);$$

la funzione B_1 è armonica entro una sezione retta ed al contorno soddisfa la

$$\frac{d B_1}{d n} = \frac{\varkappa x^2 + (2 - \varkappa) y^2}{2} \frac{d x}{d n} + (2 + \varkappa) x y \frac{d y}{d n}.$$

Inoltre si ha

$$R_x = E \sigma \varkappa^2 b_1, \quad R_y = R_z = 0$$

e dei momenti sussiste il solo M_z, cioè

$$M_z = \frac{E b_1}{2(1+\varkappa)} \left\{ \int \left[\frac{2-\varkappa}{2} y^3 - \frac{4+\varkappa}{2} x^2 y \right] d\sigma + \right.$$
$$\left. + \int \left(x \frac{\partial B_1}{\partial y} - y \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) d\sigma \right\}.$$

La deformazione dipende dalla conoscenza di B_1 e quindi dalla forma del contorno; possiamo tuttavia assegnare alcune proprietà generali. Per vedere in che cosa si trasforma una fibra longitudinale elimineremo z tra le equazioni

$$x' = x + b_1 z \left\{ m - \frac{\varkappa}{2}(x^2 - y^2) - \frac{1}{6} z^2 \right\}, \text{ ecc.};$$

ma se in queste al posto di z sostituiamo $z' - w$ e poi trascuriamo i termini dell'ordine di b_1^2 otteniamo

$$x' = x - b_1 \left\{ \frac{1}{6} z'^3 + \frac{1}{2} \varkappa z' (x^2 - y^2) - m z' \right\}$$
$$y' = y - \varkappa b_1 x y z' + b_1 p z';$$

quest'ultima equazione rappresenta un piano parallelo all'asse x; onde ogni fibra rettilinea parallela a z si conserva piana e si trasforma in una parabola di terzo grado il cui piano s'inclina sul piano xz. Il carattere generale di questa deformazione è quello di una *flessione*. Lo spostamento dell'estremità dell'asse del cilindro secondo l'asse x, è

$$b_1 l \left(m - \frac{1}{6} l^2 \right)$$

e dicesi *saetta di flessione.* Ci sono delle fibre il cui piano resta parallelo al piano $x\,z$ di flessione; per queste infatti dovendo aversi $y' = y$, sarà

$$\varkappa\, x\, y = p$$

cioè queste fibre costituiscono un cilindro la cui base è una iperbole equilatera.

Se nella espressione che dà z', al posto di x ed y sostituiamo i loro valori $x' - u$, $y' - v$ e trascuriamo i termini dell'ordine di b_1^2, otteniamo:

$$z' = z + b_1\left(\frac{1}{2}\, z^2\, x' - x'\, y'^2 + B_1' - m\, x' - p\, y'\right)$$

essendo B_1' ciò che diventa B_1 quando al posto di x ed y si sostituiscano x' ed y'; questa è l'equazione della superficie nella quale s'incurva la sezione $z = \text{cost}$; essa non è in generale piana e varia col variare di z.

Le ulteriori proprietà della deformazione dipendendo da B_1, determiniamo questa funzione nell'ipotesi di una sezione ellittica.

§ **8. Flessione non uniforme di un cilindro ellittico.** — La sezione retta sia una ellissi di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La funzioni x e $x^3 - 3\,x\,y^2$ sono armoniche; poniamo

$$B_1 = \alpha\, x + \beta\,(x^3 - 3\,x\,y^2)$$

α e β essendo due costanti da determinarsi in modo da soddisfare la condizione al contorno; la quale, per essere $\frac{dx}{dn}$, $\frac{dy}{dn}$ rispettivamente proporzionali a $\frac{x}{a^2}$, $\frac{y}{b^2}$, diventa

$$\frac{\partial B_1}{\partial x}\frac{x}{a^2}+\frac{\partial B_1}{\partial y}\frac{y}{b^2}=\frac{\varkappa\, x^2+(2-\varkappa)\,y^2}{2}\frac{x}{a^2}+$$
$$+(2+\varkappa)\frac{xy^2}{b^2},$$

cioè

$$\alpha\frac{x}{a^2}+\frac{3\beta}{a^2}(x^3-xy^2)-\frac{6\beta}{b^2}xy^2=\frac{\varkappa}{2a^2}x^3+$$
$$+\left(\frac{2-\varkappa}{2a^2}+\frac{2+\varkappa}{b^2}\right)xy^2.$$

Il secondo membro è omogeneo di terzo grado in x ed y; non così il primo; ma sostituendo ad α l'espressione equivalente $\alpha\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ renderemo anche il primo membro omogeneo di terzo grado in x ed y. Dal paragone dei termini simili risulta

$$\frac{\alpha}{a^2}+3\beta=\frac{\varkappa}{2};\ \frac{\alpha}{a^2b^2}-\frac{3\beta}{a^2}-\frac{6\beta}{b^2}=\frac{2-\varkappa}{2a^2}+\frac{2+\varkappa}{b^2}$$

donde

$$\alpha=\frac{a^2\{2a^2(1+\varkappa)+b^2\}}{3a^2+b^2}$$

$$\beta=-\frac{a^2(4+\varkappa)+b^2(2-\varkappa)}{6(3a^2+b^2)}.$$

In tal caso, poichè si tratta di una sezione con due assi di simmetria, riflettendo che

$$x \frac{\partial B_1}{\partial y} - y \frac{\partial B_1}{\partial x}$$

è dispari in y e pari in x, risulta

$$\int y^3 \, d\sigma = \int x^2 y \, d\sigma = \int \left(x \frac{\partial B_1}{\partial y} - y \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) d\sigma = 0$$

e quindi

$$M_z = 0.$$

Si potrebbe anche mostrare che tale risultato è valido per qualunque sezione con due assi di simmetria *.

Nel caso di un cerchio si ha:

$$B_1 = \frac{a^2}{4} \left\{ (3 + 2\varkappa) x - \frac{x^3 - 3 x y^2}{a^2} \right\}$$

e poichè

$$\int x^2 \, d\sigma = \int y^2 \, d\sigma = \frac{\pi a^4}{4},$$

risulta

$$R_x = \frac{\pi E a^4}{4} b_1$$

e si può formare l'espressione completa di w. Le curve $w =$ cost. sono dette curve di *egual distor-*

* Clebsch, l. c., pag. 103.

sione e sopra una determinata sezione retta sono curve di terzo ordine.

§ **9. Torsione.** — Supponendo finalmente nulle tutte le costanti meno b_0, abbiamo

$$u = b_0 z (y + m), \quad v = - b_0 z (x - p)$$
$$w = b_0 (B_0 - m x - p y), \quad \Theta = 0$$

e le componenti del sistema di forze della base superiore si riducono alla sola M_z, il cui valore è

$$M_z = \frac{E b_0}{2(1+\varkappa)} \left\{ - \sigma (\alpha^2 + \beta^2) + \right.$$
$$\left. + \int \left(x \frac{\partial B_0}{\partial y} - y \frac{\partial B_0}{\partial x} \right) d\sigma \right\};$$

si ha cioè una coppia contenuta nel piano della base, detta *coppia di torsione*. La funzione B_0, armonica su ogni sezione retta, soddisfa al contorno la

$$\frac{d B_0}{d n} = x \frac{d y}{d n} - y \frac{d x}{d n};$$

è inoltre

$$m = \left(\frac{\partial B_0}{\partial x} \right)_0; \quad p = \left(\frac{\partial B_0}{\partial y} \right)_0.$$

Trasportiamo gli assi parallelamente a loro stessi in un punto O_1 di coordinate $p, -m$; cioè poniamo

$$x_1 = x - p, \quad y_1 = y + m$$
$$\Phi = B_0 - m x - p y.$$

Quindi

$$u = b_0 z y_1; \quad v = -b_0 z x_1; \quad w = b_0 \Phi.$$

La funzione Φ è, come B_0, armonica in σ; di più al contorno

$$\frac{d\Phi}{dn} = x\frac{dy}{dn} - y\frac{dx}{dn} - m\frac{dx}{dn} - p\frac{dy}{dn}$$

cioè

$$\frac{d\Phi}{dn} = x_1\frac{dy_1}{dn} - y_1\frac{dx_1}{dn}.$$

L'espressione di M_z si trasforma agevolmente osservando che

$$\int\left(x\frac{\partial B_0}{\partial y} - y\frac{\partial B_0}{\partial x}\right)d\sigma =$$

$$= \int\left(x_1\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)d\sigma + (m^2 + p^2)\sigma +$$

$$+ m\int\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}d\sigma + p\int\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}d\sigma + p\int x_1\,d\sigma - m\int y_1\,d\sigma.$$

Ma:

$$\int x_1\,d\sigma = \int x\,d\sigma - p\sigma = -p\sigma; \int y_1\,d\sigma = m\sigma$$

$$\int\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}d\sigma = -\int x_1\frac{d\Phi}{dn}ds = -\int x_1^2\frac{dy_1}{dn}ds +$$

$$+\int x_1 y_1\frac{dx_1}{dn}ds = -m\sigma; \quad \int\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} = -p\sigma$$

quindi

$$M_z = \frac{E b_0}{2(1+\varkappa)} \left\{ -\sigma(\alpha^2 + \beta^2 + m^2 + p^2) + \right.$$

$$\left. + \int \left(x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) d\sigma \right\}.$$

Ma $\sigma(\alpha^2 + p^2)$, $\sigma(\beta^2 + m^2)$ rappresentano i momenti d'inerzia della sezione rispetto ai nuovi assi y_1 ed x_1; la loro somma esprime il momento rispetto al punto O_1, o rispetto all'asse z passante per O_1. Diciamo I tal momento e chiamiamo $1-q$ il rapporto dell'integrale ad I, cioè poniamo

$$\int \left(x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) d\sigma = (1-q) I,$$

allora

$$M_z = -\frac{E I}{2(1+\varkappa)} q b_0.$$

Il fattore q *(fattore di torsione)* dipende dalla forma del contorno e il fattore che nella espressione precedente accompagna b_0 dicesi *rigidità di torsione.*

Studiamo in breve la deformazione. L'asse $O_1 z$ dicesi *asse di torsione;* lo spostamento del punto in cui una fibra parallela all'asse incontra una data sezione retta si riduce ad una rotazione intorno all'asse di torsione di ampiezza $-b_0 z$, accompagnata da una traslazione costante $b_0 \Phi$ lungo l'asse; quindi le fibre longitudinali si trasformano in tante eliche cilindriche. La componente w dello

spostamento è indipendente dalla sezione retta che si considera, ma dipende dalla forma del contorno. La sezione $z = 0$ non resta piana; s'incurva in un certo modo e tutte le altre s'incurvano egualmente, subiscono cioè una stessa *distorsione*. L'asse di torsione non si altera. Studiamo un caso particolare. *

§ 10. Torsione di un cilindro ellittico *. — Se il contorno è circolare, poichè $\frac{dx}{dn}$ e $\frac{dy}{dn}$ sono proporzionali ad x ed y, si ha

$$\frac{dB_0}{dn} = x\frac{dy}{dn} - y\frac{dx}{dn} = 0$$

quindi

$$B_0 = \text{cost} = 0,$$

onde anche

$$m = p = 0 \quad \text{e} \quad q = 1.$$

L'asse di torsione coincide coll'asse del cilindro; w essendo nulla le sezioni rette non subiscono distorsione; infine

$$M_z = -\frac{E}{2(1+\varkappa)}\frac{\pi a^4}{4} b_0.$$

---

* La trattazione di varî casi particolari per la ricerca di w ha dato luogo a gran numero di pubblicazioni: accenniamo solo a quelle del Turazza, *Equilibrio di un'asta parallelepipeda rettangolare*, Mem. Istituto veneto, **18**, 1874.

Padova, *Il problema di Saint-Venant per un prisma rettangolare*. Nuovo Cimento. **10**, 1881. Vedi anche *Estensione del problema di Saint-Venant*. Rend. Acc. Linc., agosto 1890 e relativa a corpi costituiti da fibre curvilinee.

Nel caso di una sezione ellittica la condizione al contorno è

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial B_0}{\partial x}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial B_0}{\partial y}=x\,y\,\frac{a^2-b^2}{a^2\,b^2}\,.$$

Ponendo

$$B_0=A\,x\,y\,,$$

essendo A una costante, risulta $\Delta_2 B_0=0$ e la condizione al contorno ci dà subito

$$A=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2};$$

quindi

$$m=p=0$$

$$\Phi=B_0=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,x\,y\,,$$

l'asse di torsione coincide coll'asse del cilindro. Calcoliamo il fattore q.

Si ha

$$\int x^2\,d\sigma=\frac{\pi\,a^3\,b}{4}\,;\quad \int y^2\,d\sigma=\frac{\pi\,a\,b^3}{4}$$

$$I=\frac{\pi\,a\,b}{4}\,(a^2+b^2)$$

$$\int\left(x\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}-y\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)d\sigma=\frac{\pi\,a\,b}{4}\,\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}=(1-q)\,I$$

donde

$$q = \frac{4\,a^2\,b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$M_z = -\frac{E}{2(1+\varkappa)}\,\frac{\sigma^4}{4\,\pi^2\,I}\,b_0\,.$$

Poichè per i punti della sezione $z=0$ si ha

$$x' = x\,,\; y' = y\,,\quad z' = b_0\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,x\,y\,,$$

la sezione suddetta si trasforma nel paraboloide iperbolico

$$z' = b_0\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,x'\,y'\,.$$

Gli assi della sezione ellittica non si deformano: il primo ed il terzo quadrante ellittico si elevano; gli altri due si abbassano.

Ricapitolando potremo dire che la deformazione del cilindro nell'ipotesi del § 2 comprende: una estensione semplice, due flessioni uniformi, due non uniformi e finalmente una torsione: e può riguardarsi come sovrapposizione di queste sei speciali deformazioni.

Molti dei precedenti risultati possono estendersi al caso di un cilindro non isotropo *.

* Nel Cap. VI dell'opera del Love si trova infatti una particolareggiata discussione del problema di Saint-Venant nell'ipotesi di una sostanza cristallina avente tre assi di simmetria. Se il cilindro è isotropo e se si suppone che le tensioni agenti sulla superficie laterale siano espresse da polinomi razionali interi in z, il problema si può ridurre ad uno di Saint-Venant. Vedi ALMANSI, *Sopra la deformazione dei cilindri sollecitati lateralmente.* Rend. Acc. Lincei 5, 19 maggio 1901.

CAPITOLO DECIMO.

DEFORMAZIONE DELLE PIASTRE CILINDRICHE O PROBLEMA COMPLEMENTARE DI SAINT-VENANT.

§ 1. **Posizione del problema.** — Consideriamo un cilindro, le cui basi corrispondano a $z = \pm h$, sollecitato da forze distribuite soltanto sulla superficie convessa mentre le due basi siano libere; quindi su queste si abbia

$$X_z = Y_z = Z_z = 0; \qquad (1)$$

e sulla superficie convessa:

$$X_n = X_x \frac{dx}{dn} + Y_x \frac{dy}{dn}; \text{ ecc.} \qquad (2)$$

Se l'altezza è molto piccola rispetto alle altre due dimensioni del cilindro abbiamo ciò che chiamasi una *piastra cilindrica*. Ma noi supporremo h qualsiasi. Le forze di massa siano nulle; vogliamo investigare quelle speciali deformazioni per le quali le (1) valgano in tutto il cilindro. In tal caso considerando il cilindro come l'assieme di

tante sezioni parallele alle due basi le pressioni interne normali alle sezioni sono nulle, e le sezioni sono soggette a sole pressioni tangenziali. Poichè in tal caso

$$Z_n = 0$$

si conclude che sulla superficie convessa del cilindro le forze sono parallele alle basi. Questo problema, che può dirsi in certo qual modo complementare di quello di Saint-Venant, è stato proposto e risoluto da Clebsch *.

§ **2. Ricerca degli spostamenti.** — Le equazioni (1), ricordando le espressioni delle componenti speciali di pressione in funzione delle componenti di deformazione (form. 2, Cap. preced.), ci danno

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\varkappa}{1-2\varkappa}\Theta = 0. \tag{5}$$

Le equazioni indefinite si riducono poscia a

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0,$$

---

* Clebsch, l. c., pag. 148.

le quali a loro volta equivalgono alle seguenti

$$\Delta_2 u + \frac{1}{1-2\varkappa}\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

$$\Delta_2 v + \frac{1}{1-2\varkappa}\frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Quindi le u, v, w soddisfano a cinque equazioni. È anche opportuno considerare la seguente

$$\Delta_2 w + \frac{1}{1-2\varkappa}\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

che però è una conseguenza di (3), (4), (5). Derivando la (6) rispetto e z e sostituendo a $\frac{\partial u}{\partial z}$ il valore ricavato dalla (3), otteniamo

$$-\Delta_2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{1}{1-2\varkappa}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x\,\partial z} = 0.$$

Derivando invece la (8) rispetto ad x si deduce

$$\Delta_2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{1}{1-2\varkappa}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x\,\partial z} = 0.$$

Quindi

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x\,\partial z} = 0,$$

e in modo analogo si prova che

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

Riflettiamo poi che, per l'assenza di forze di massa, la dilatazione cubica Θ è una funzione armonica; quindi dalla (5) si deduce

$$\Delta_2 \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

e però dalla (8) ancora

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0 .$$

Dalle equazioni ottenute si deduce quindi che

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \text{cost.},$$

e la (5) ci dà

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \text{cost} = -C ;$$

integrando

$$w = f_1 - z F - \frac{1}{2} z^2 C \tag{9}$$

essendo f_1 e F due funzioni di x ed y.

Dalla (5) ricaviamo

$$\Theta = \frac{1 - 2\varkappa}{\varkappa} (Cz + F); \tag{10}$$

con ciò la (5) risulta soddisfatta. Per soddisfare la (8) dobbiamo avere

$$-C - z \Delta_2 F + \Delta_2 f_1 + \frac{1}{\varkappa} C = 0$$

e questa, dovendo esser valida per qualunque valore di z, si spezza nelle altre due

$$\Delta_2 F = 0, \quad \Delta_2 f_1 + \frac{1-\varkappa}{\varkappa} C = 0.$$

È opportuno sostituire alla f_1 un'altra funzione che soddisfi la $\Delta_2 = 0$; però notando che

$$\Delta_2 \left(\frac{x^2 + y^2}{4} \right) = 1,$$

basterà porre

$$f_1 = f - \frac{1-\varkappa}{\varkappa} C \frac{x^2 + y^2}{4},$$

essendo

$$\Delta_2 f = 0;$$

e la (9) ci darà quindi

$$w = f - z F - \frac{1-\varkappa}{\varkappa} \frac{C}{4} (x^2 + y^2) - \frac{C}{2} z^2; \quad (11)$$

le f e F sono armoniche in ogni sezione retta.

Cognita w la (3) ci farà conoscere u e la (4) v; infatti

$$\frac{\partial u}{\partial z} = z \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1-\varkappa}{\varkappa} \frac{C}{2} x - \frac{\partial f}{\partial x}$$

ed integrando

$$u = \varphi + \frac{1-\varkappa}{\varkappa} \frac{C}{2} x z - z \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{z^2}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \quad (12)$$

e così

$$v = \psi + \frac{1-\varkappa}{\varkappa}\frac{C}{2}yz - z\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{z^2}{2}\frac{\partial F}{\partial y} \quad (13)$$

φ e ψ essendo funzioni di x e y. Ma ora debbono essere verificate anche le (6) e (7) le quali coi precedenti valori ci danno

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 \varphi &= -\frac{1+\varkappa}{\varkappa}\frac{\partial F}{\partial x} \\ \Delta_2 \psi &= -\frac{1+\varkappa}{\varkappa}\frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned}\right. \quad (14)$$

sicchè φ e ψ sono funzioni biarmoniche di x ed y. Le quattro funzioni f, F, φ, ψ non sono del tutto indipendenti. Infatti abbiamo due diverse espressioni per Θ; una è la (10); l'altra si ottiene derivando rispettivamente le (12), (13), (11) rispetto x, y, z e poi sommando, ed è

$$\frac{1-2\varkappa}{\varkappa}Cz - F + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

onde

$$\frac{1-\varkappa}{\varkappa}F = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

la quale permette di eliminare dalle formule precedenti la F; dunque ricapitolando possiamo dire che se f, φ, ψ sono tre funzioni di x ed y tali che

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_2 f = 0 \\ &\Delta_2 \varphi + \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = 0 \\ &\Delta_2 \psi + \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

e C una costante, le formule risolutive del problema sono

$$\left.\begin{aligned}
u &= \varphi + z\left(\frac{1-\varkappa}{2\varkappa} C x - \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \\
&\qquad + \frac{\varkappa}{1-\varkappa}\frac{z^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right), \\
v &= \psi + z\left(\frac{1-\varkappa}{2\varkappa} C y - \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \\
&\qquad + \frac{\varkappa}{1-\varkappa}\frac{z^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right), \\
w &= f - \frac{1-\varkappa}{4\varkappa} C(x^2 + y^2) - \\
&\qquad - \frac{\varkappa}{1-\varkappa} z\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - \frac{C}{2} z^2.
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Le u, v, w risultano funzioni intere di secondo grado in z.

§ 3. Carattere generale della deformazione. Flessione sferica. — Nelle formule precedenti C, f, φ, ψ e le loro derivate compariscono linearmente e però potremo riguardare la deformazione come risultante dalla sovrapposizione di altre tre; una corrispondente alla costante C; una alla sola f e una finalmente alle sole φ e ψ.

Ci limiteremo a fare una sommaria discussione di questi tre casi. Consideriamo anzitutto la deformazione corrispondente alla costante C che potremo sempre supporre positiva,

Le formule (16) ci danno

$$u = \frac{1-\varkappa}{2\varkappa} C x z; \quad v = \frac{1-\varkappa}{2\varkappa} C y z$$

$$w = -\frac{1-\varkappa}{4\varkappa} C(x^2+y^2) - \frac{C}{2} z^2.$$

$$\Theta = \frac{1-2\varkappa}{\varkappa} C z.$$

Di qui deduciamo per le componenti di pressione che non sono nulle

$$X_x = Y_y = -\frac{E}{2\varkappa} C z; \quad X_y = 0;$$

e quindi

$$X_n = -\frac{E}{2\varkappa} C z \cos(n, x);$$

$$Y_n = -\frac{E}{2\varkappa} C z \cos(n, y); \quad Z_n = 0.$$

Lungo una stessa generatrice (essendo costanti $\cos(n, x)$ e $\cos(n, y)$) queste forze, per due valori eguali e contrari di z essendo eguali e contrarie, danno luogo ad una coppia il cui piano è normale alle generatrici del cilindro e la cui grandezza non dipende dalla generatrice che si considera. La deformazione è dunque prodotta da coppie agenti al contorno. Notiamo poi che C è dello stesso ordine di u, v, w.

Per trovare la superficie nella quale si trasforma

una sezione retta o una fibra normale al piano xy, dovremo considerare le equazioni

$$x' = x + \frac{1-\varkappa}{2\varkappa} C x z\,; \quad y' = y + \frac{1-\varkappa}{2\varkappa} C y z\,,$$

$$z' = z - \frac{1-\varkappa}{4\varkappa} C (x^2 + y^2) - \frac{C}{2} z^2.$$

Eliminando x ed y troveremo la superficie nella quale si trasforma la sezione $z =$ cost. Sostituendo nella terza al posto di x ed y rispettivamente $x' - u$, $y' - v$ e trascurando i termini in C^2, otterremo

$$z' = z - \frac{C}{2} z^2 - \frac{1-\varkappa}{4\varkappa} C (x'^2 + y'^2) =$$

$$= \text{cost} - \frac{1-\varkappa}{4\varkappa} C (x'^2 + y'^2)\,,$$

equazione di un paraboloide di rotazione intorno a z; i varî paraboloidi corrispondenti alle varie sezioni rette sono tutti congruenti e volgono la concavità verso le z negative. Quello corrispondente alla sezione mediana $z = 0$, è

$$z' = -\frac{1-\varkappa}{4\varkappa} C (x'^2 + y'^2).$$

Se z è molto piccolo rispetto x ed y, z'^2 è trascurabile di fronte z'; l'equazione precedente differirà poco dalla

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + \frac{4\varkappa}{C(1-\varkappa)} z' = 0$$

che è quella di una sfera avente il centro sull'asse z ad una distanza

$$-\frac{2\varkappa}{C(1-\varkappa)}$$

dalla origine.

Eliminando invece tra le equazioni precedenti la z troveremo le trasformate delle fibre parallele all'asse z. Sostituendo nella prima al posto di z, $z'-w$ abbiamo

$$x' = x + \frac{1-\varkappa}{2\varkappa} Cx \left\{ z' + \frac{1-\varkappa}{4\varkappa} C(x^2+y^2) + \frac{C}{2} z^2 \right\}$$

e trascurando i termini in C^2, otteniamo

$$x' = x\left(1 + \frac{1-\varkappa}{2\varkappa} C z'\right)$$

e così

$$y' = y\left(1 + \frac{1-\varkappa}{2\varkappa} C z'\right);$$

le fibre considerate si trasformano in rette inclinate sull'asse delle z, che incontrano nel centro della sfera dianzi considerata. Cioè le fibre normali al piano xy restano rettilinee e si conservano normali alla superficie trasformata del piano xy.

Il carattere generale di questa deformazione è quello di una flessione; dicesi *flessione sferica*.

§ **4. Flessione non uniforme.** — Consideriamo la deformazione corrispondente alla funzione ar-

monica f. Le componenti di spostamento sono

$$u = -z\frac{\partial f}{\partial x}; \quad v = -z\frac{\partial f}{\partial y}; \quad w = f; \quad \Theta = 0.$$

Inoltre

$$X_x = \frac{E}{1+\varkappa} z \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad Y_y = \frac{E}{1+\varkappa} z \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$X_y = \frac{E}{1+\varkappa} z \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Le forze distribuite sulla superficie convessa del cilindro, lungo ogni generatrice, si riducono ad una coppia variabile da generatrice a generatrice. Tale deformazione ha dunque il carattere generale di una flessione, ben distinta però da quella precedentemente considerata e che dicesi *flessione non uniforme*. Lo studio particolareggiato di questa deformazione esige la conoscenza della funzione armonica f; ora osserviamo che per i punti del piano $z = 0$, si ha

$$u = v = 0; \qquad w = f;$$

cioè questi punti si spostano normalmente al piano $z = 0$. La f sarà completamente determinata se imponiamo la condizione che i punti della periferia della sezione mediana subiscano spostamenti determinati; chè in tal caso la f è determinata dai suoi valori al contorno. Tale condizione equivale a dare la curva nella quale si trasforma il contorno della sezione mediana. La determinazione di f, come sappiamo, è assai semplice per un contorno circolare.

§ 5. Deformazione corrispondente alle due funzioni φ e ψ. Estensione. — Le componenti di spostamento sono in tal caso

$$u = \varphi + \frac{\varkappa}{1-\varkappa}\frac{z^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = u_0 + u_2 z^2$$

$$v = \psi + \frac{\varkappa}{1-\varkappa}\frac{z^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = v_0 + v_2 z^2$$

$$w = -\frac{\varkappa}{1-\varkappa} z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = -w_1 z.$$

Calcolando le componenti di pressione X_x, Y_y, X_y si trova che esse sono della forma $A + Bz^2$ e quindi, essendo A e B funzioni di x ed y, esse non cambiano mutando z in $-z$; dunque le forze distribuite lungo una generatrice danno luogo ad una forza unica variabile colla generatrice; il carattere generale di questa deformazione è quello di una *estensione.*

Per i punti della sezione mediana, $w = 0$ e però tale sezione resta piana: posto come al solito

$$x' = x + u_0 + u_2 z^2;\ y' = y + v_0 + v_2 z^2;$$
$$z' = z(1 - w_1)$$

risulta

$$z = \frac{z'}{1 - w_1}$$

cioè, entro i soliti limiti di approssimazione,

$$z^2 = z'^2$$

e quindi ancora

$$x' = x + u_0 + u_2 z'^2, \quad y' = y + v_0 + v_2 z'^2$$

le quali rappresentano la curva nella quale si trasforma una fibra parallela all'asse z. Ma da queste si deduce

$$v_2 x' - u_2 y' = v_2 (x + u_0) - u_2 (y + v_0)$$

onde tale curva è una parabola contenuta in un piano normale al piano mediano.

Le ulteriori proprietà di questa deformazione dipendono dalla conoscenza di φ e ψ; limitiamoci a considerare un caso particolare.

Vediamo se u e v possono riuscire indipendenti da z. Dovrà essere

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varkappa = \text{cost.} \tag{17}$$

allora

$$w = -\frac{\varkappa}{1 - \varkappa} \alpha z$$

e si ha una *estensione uniforme*. Le (15) diventano

$$\Delta_2 \varphi = \Delta_2 \psi = 0$$

cioè

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0,$$

e in modo analogo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0$$

donde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \beta = \text{cost.} \tag{18}$$

Le (17) e (18) possono scriversi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha x + \beta y}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha y - \beta x}{2}\right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha x + \beta y}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha y - \beta x}{2}\right);$$

posto adunque

$$\varphi = \frac{\alpha x + \beta y}{2} + \varphi_1, \quad \psi = \frac{\alpha y - \beta x}{2} + \psi_1,$$

φ_1 e ψ_1 essendo armoniche, risulta

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0;$$

quindi ψ_1 e φ_1 sono rispettivamente la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di una funzione della variabile complessa $x + iy$. In tal caso abbiamo

$$u = \frac{1}{2}\alpha x + \frac{1}{2}\beta y + \varphi_1$$

$$v = -\frac{1}{2}\beta x + \frac{1}{2}\alpha y + \psi_1$$

$$w = -\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\alpha z$$

$$\Theta = \frac{1-2\varkappa}{\varkappa}\alpha;$$

la dilatazione cubica è uniforme.

La deformazione si può supporre come risultante dalla sovrapposizione di altre tre. La prima avendo per componenti

$$\frac{1}{2}\beta y, \quad -\frac{1}{2}\beta x, \quad 0,$$

corrisponde ad una rotazione del cilindro intorno z.

La seconda ha per componenti

$$\frac{1}{2}\alpha x; \quad \frac{1}{2}\alpha y; \quad -\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\alpha z.$$

Le forze in superficie si riducono ad una trazione uniforme e normale alla superficie stessa, come si vede subito.

Posto

$$x' = x\left(1+\frac{\alpha}{2}\right); \; y' = y\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$z' = z\left(1-\frac{\alpha\varkappa}{1-\varkappa}\right)$$

risulta che le fibre parallele all'asse x restano rettilinee; i loro punti si abbassano mentre la fibra si sposta parallelamente a sè stessa. Le sezioni rette restano piane avvicinandosi al piano mediano.

La terza ha per componenti

$$\varphi_1, \; \psi_1, \; 0,$$

e le sezioni rette restano piane.

Notiamo da ultimo che mediante le (16) sarebbe agevole formare le espressioni generali delle

X_x, Y_y, X_y e quindi dare le forme delle X_n e Y_n che risultano di secondo grado in z. *

---

* Il calcolo delle X_x, ecc. si può fare direttamente senza conoscere le u, v, w in modo assai elegante come del resto fa il Kirchhoff pel problema di SAINT-VENANT, *Vorl. ü. math. Physik. Mecanik*, pag. 399, Leipzig, 1883; vedi una nota del prof. TEDONE, *Sulla deformazione delle piastre di grossezza finita.* Rend. Acc. Lincei, marzo, 1901.

Per maggiori particolari si può consultare il Clebsch e specialmente la traduzione francese di Saint-Venant e Flamant.

CAPITOLO UNDECIMO.

I PROBLEMI DEL PROF. VOIGT E LA DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI ELASTICHE DEI CRISTALLI *

§ 1. **Posizione del problema.** — I problemi risoluti dal prof. Voigt costituiscono una generalizzazione del problema di Saint-Venant; essi permettono di assegnare dei metodi generali per la determinazione delle costanti elastiche dei cristalli e ricevono una importante applicazione nello studio dei fenomeni piezoelettrici di un cilindro cristallino **. In questi problemi si considera un cilindro cristallino colle generatrici parallele all'asse z soggetto a forze distribuite, in modo op-

* Vedi i *Theoretische Studien*, già citati e precisamente la 2ª parte: *Unters. des elastischen Verhaltens eines Cylinders aus krys. Subs. auf dessen Mantelfläche keine Kräfte wirken, wenn die in seinem inern wirkenden Spannungen längs der Cylinderaxe constant sind.*

** VOIGT, *Allgemeine Theorie der piezo-und-pyroelectrischen Ersch. an Kryst.* Abh. der K. Gesel. zu Göttingen. **37**, 1890.

portuno, soltanto sulle due basi e si cerca se sono possibili delle deformazioni per le quali le componenti speciali di pressione risultino costanti lungo tutto l'asse del cilindro cioè indipendenti da z. Tale condizione equivale a supporre che anche le componenti di deformazione siano indipendenti da z.

§ **2. Ricerca di una deformazione costante lungo l'asse del cilindro.** — Le sei componenti di deformazione cioè

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial w}{\partial z},\ \dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}, \end{array}\right\} \quad (1)$$

debbono risultare indipendenti da z. La terza ci dice subito che w deve contenere linearmente la z, cioè deve essere della forma

$$w = W + z\,W_1,$$

essendo W e W_1 funzioni di x ed y. Anche $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ sono lineari in z e quindí dalla quarta e quinta delle (1) risulta che tale proprietà compete pure a $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial z}$ e però u e v sono funzioni di secondo grado in z, cioè

$$u = U + z\,U_1 + \frac{z^2}{2}\,U_2\,;\ v = V + z\,V_1 + \frac{z^2}{2}\,V_2\,.$$

Le U e V sono funzioni di x ed y. Le componenti di deformazione assumono quindi la forma

$$\frac{\partial U}{\partial x}+z\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{z^2}{2}\frac{\partial U_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}+z\frac{\partial V_1}{\partial y}+\frac{z^2}{2}\frac{\partial V_2}{\partial y};\quad W_1$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}+V_1+z\left(\frac{\partial W_1}{\partial y}+V_2\right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}+U_1+z\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}+U_2\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}+z\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)+\frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}+\frac{\partial V_2}{\partial x}\right);$$

e perchè risultino indipendenti da z è necessario che sia anzitutto

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}=\frac{\partial U_2}{\partial x}=\frac{\partial V_1}{\partial y}=\frac{\partial V_2}{\partial y}=0$$

cioè U_1 ed U_2 debbono essere funzioni di y solamente e V_1 e V_2 della sola x. Inoltre

$$\frac{\partial W_1}{\partial y}+V_2=0;\quad \frac{\partial W_1}{\partial x}+U_2=0$$

$$\frac{dU_1}{dy}+\frac{dV_1}{dx}=0;\quad \frac{dU_2}{dy}+\frac{dV_2}{dx}=0.$$

Da queste due ultime si ricava subito che

$$\frac{dV_1}{dx}=-\frac{dU_1}{dy}=k,\quad \frac{dV_2}{dx}=-\frac{dU_2}{dy}=\alpha$$

α e k essendo costanti. Quindi

$$V_1 = k\,x + \alpha_1,\quad U_1 = -k\,y + \alpha_2$$
$$V_2 = \alpha\,x - g_2,\quad U_2 = -\alpha\,y - g_1$$

α_1, α_2, g_1, g_2 essendo delle costanti. La funzione W_1 risulta poi determinata dalle

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \alpha\,y + g_1,\quad \frac{\partial W_1}{\partial y} = -\alpha\,x + g_2\,;$$

di qui

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x\,\partial y} = \alpha,\quad \frac{\partial^2 W_1}{\partial y\,\partial x} = -\alpha$$

onde $\alpha = 0$ e

$$W_1 = g_1\,x + g_2\,y + g_3$$

g_3 essendo una nuova costante. Le funzioni U, V, W restano arbitrarie.

Risulta dunque

$$\left.\begin{aligned} u &= U + z\,(-k\,y + \alpha_2) - \frac{1}{2}\,g_1\,z^2 \\ v &= V + z\,(k\,x + \alpha_1) - \frac{1}{2}\,g_2\,z^2 \\ w &= W + z\,(g_1\,x + g_2\,y + g_3). \end{aligned}\right\}\ (2)$$

La determinazione di queste tre funzioni arbitrarie di x ed y non può ottenersi in altro modo che specializzando ulteriormente le condizioni del problema. E ciò noi faremo in due modi diversi.

§ 3. Ricerca di una deformazione costante lungo l'asse del cilindro e in cui le forze interne sono parallele all'asse. — Ciò equivale a supporre che tutte le componenti di pressione siano nulle ad eccezione di Z_z. Ora è

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} = - s_{13} Z_z \,; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} = - s_{23} Z_z \,;$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = g_1 x + g_2 y + g_3 = - s_{33} Z_z \,,$$

in virtù delle relazioni della pag. 171.

Dunque Z_z e quindi $\frac{\partial U}{\partial x}$ e $\frac{\partial V}{\partial y}$ sono lineari in x ed y; quindi

$$U = \frac{1}{2} a_1 x^2 + b_1 x y + d_1 x + Y$$

$$V = \frac{1}{2} c_2 y^2 + b_2 x y + e_2 y + X,$$

essendo a_1, $b_1, \ldots$ costanti ed Y ed X rispettivamente funzioni della sola y e della sola x. Ma anche

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = b_1 x + b_2 y + \frac{d X}{d x} + \frac{d Y}{d y} = - s_{63} Z_z$$

è lineare in x ed y; dunque $\frac{dX}{dx}$ sarà lineare in x e $\frac{dY}{dy}$ lineare in y, cioè X sarà di secondo grado

in x e Y di secondo grado in y. Risulta infine che

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial W}{\partial x}-ky+\alpha_2=-s_{53}\,Z_z$$

quindi $\frac{\partial W}{\partial x}$, come pure $\frac{\partial W}{\partial y}$, sono rispettivamente lineari in x e y e però infine U, V, W sono funzioni di secondo grado in x ed y; cioè

$$U=\frac{1}{2}a_1\,x^2+b_1\,x\,y+\frac{1}{2}c_1\,y^2+d_1\,x+e_1\,y+l_1$$

$$V=\frac{1}{2}a_2\,x^2+\ldots$$

$$W=\frac{1}{2}a_3\,x^2+\ldots$$

In totale dunque abbiamo 24 costanti; ma possiamo sempre supporre che resti fisso il centro delle coordinate; cioè

$$u=v=w=0 \text{ per } x=y=z=0$$

e quindi

$$l_1=l_2=l_3=0,$$

e che il punto $x=y=0$ e $z=l$ (estremità dell'asse) resti sull'asse stesso durante la deformazione e quindi

$$\alpha_1=\frac{1}{2}g_2\,l;\ \alpha_2=\frac{1}{2}g_1\,l;$$

onde infine otteniamo

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} a_1 x^2 + b_1 x y + \frac{1}{2} c_1 y^2 + d_1 x + e_1 y + \\ &\qquad\qquad + z\left(g_1 \frac{l-z}{2} - k y\right) \\ v &= \frac{1}{2} a_2 x^2 + \ldots \qquad + z\left(g_2 \frac{l-z}{2} + k x\right) \\ w &= \frac{1}{2} a_3 x^2 + \ldots \qquad + z\,(g_1 x + g_2 y + g_3). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

La deformazione consta della sovrapposizione di un certo numero di deformazioni parziali; alcune di queste possono agevolmente interpretarsi.

Supponendo infatti nulle tutte le costanti meno g_1, si ha

$$u = \frac{1}{2} g_1 z\,(l - z), \quad v = 0, \quad w = g_1 x z,$$

le quali formule definiscono una *flessione* nel piano $x z$.

Così la costante g_2 definisce una flessione nel piano $y z$.

Se la sola costante g_3 è diversa da zero si ha

$$u = v = 0\,; \qquad w = g_3 z\,;$$

abbiamo cioè una *estensione semplice*. Finalmente supponendo diversa da zero la sola k risulta

$$u = -k y z, \qquad v = k x z, \qquad w = 0,$$

le quali definisoonc una *torsione*.

Dalle (3) ricaviamo i valori seguenti per le componenti di deformazione

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1 x + b_1 y + d_1; \quad b = b_2 x + c_2 y + e_2 \\ c &= g_1 x + g_2 y + g_3 \\ f &= b_3 x + c_3 y + e_3 + \frac{1}{2} g_2 l + k x \\ g &= a_3 x + b_3 y + d_3 + \frac{1}{2} g_1 l - k y \\ h &= a_2 x + b_2 y + d_2 + b_1 x + c_1 y + e_1. \end{aligned}\right\} (4)$$

Ricordando poi che tutte le componenti di pressione sono nulle ad eccezione di Z_z, che è lineare in x ed y e quindi della forma

$$- Z_z = G_1 x + G_2 y ,$$

avremo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned} c_{11} a + c_{12} b + \ldots \quad &+ c_{16} h = 0 \\ c_{21} a + c_{22} b + \ldots \quad &+ c_{26} h = 0 \\ c_{31} a + c_{32} b + \ldots \quad &+ c_{36} h = G_1 x + G_2 y \\ c_{41} a + c_{42} b + \ldots \quad &+ c_{46} h = 0 \\ c_{51} a + c_{52} b + \ldots \quad &+ c_{56} h = 0 \\ c_{61} a + c_{62} b + \ldots \quad &+ c_{66} h = 0 ; \end{aligned}$$

essendo c_{rs} i coefficienti isotermici di elasticità.

Sostituendo in queste alle a, b, ... h i valori (4) i primi membri si trasformano in funzioni lineari di x ed y, le quali dovendo essere nulle o della forma

$G_1 x + G_2 y$, per qualunque valore di x ed y, danno luogo a tre sistemi di equazioni lineari; il primo di questi si ottiene ponendo a zero i termini noti ed è

$$c_{r1} d_1 + c_{r2} e_2 + c_{r3} g_3 + c_{r4} \left(e_3 + \frac{1}{2} g_2 l\right) +$$
$$+ c_{r5} \left(d_3 + \frac{1}{2} g_1 l\right) + c_{r6} (d_2 + e_1) = 0$$

e poichè il determinante formato colle c è positivo, si ha

$$d_1 - e_2 = g_3 = c_3 + \frac{1}{2} g_2 l = d_3 + \frac{1}{2} g_1 l = d_2 + e_1 = 0.$$

Eguagliando a zero, oppure a G_1 o a G_2 nelle precedenti equazioni i termini in x ed y, avremo altri due sistemi, il primo dei quali è della forma

$$c_{r1} a_1 + c_{r2} b_2 + c_{r3} g_1 + c_{r4} (b_3 + k) + c_{r5} a_3 +$$
$$+ c_{r6} (a_2 + b_1) = 0$$

dove $r = 1, 2, 4, 5, 6$; per $r = 3$ il secondo membro è eguale a G_1; l'altro sistema è

$$c_{r1} b_1 + c_{r2} c_2 + c_{r3} g_2 + c_{r4} c_3 + c_{r5} (b_3 - k) +$$
$$+ c_{r6} (b_2 + c_1) = 0$$

dove $r = 1, 2, 4, 5, 6$; per $r = 3$ il secondo membro è eguale a G_2.

Diciamo Γ il determinante formato colle c_{rs}; i moduli di elasticità s_{mn} (vedi § 4 del Cap. 5°) sono

gli elementi aggiunti di c_{mn} in Γ divisi per Γ; quindi si ha

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_1}{G_1}=s_{31}\,,\ \dfrac{b_2}{G_1}=s_{32}\,,\ \dfrac{g_1}{G_1}=s_{33}\,,\ \dfrac{b_3+k}{G_1}=s_{34}\,, \\ \dfrac{a_3}{G_1}=s_{35}\,,\ \dfrac{a_2+b_1}{G_1}=s_{36}\,;\ \dfrac{b_1}{G_2}=s_{31}\,,\ \dfrac{c_2}{G_2}=s_{32}\,, \\ \dfrac{g_2}{G_2}=s_{33}\,,\ \dfrac{c_3}{G_2}=s_{34}\,,\ \dfrac{b_3-k}{G_2}=s_{35}\,,\ \dfrac{b_2+c_1}{G_2}=s_{36}\,. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Da questa ricaviamo pel cofficiente di torsione il valore

$$k=\frac{1}{2}(G_1\,s_{34}-G_2\,s_{35}).$$

Le componenti di spostamento assumono una forma più semplice, se supponiamo nulla la rotazione di un elemento intorno all'origine secondo l'asse z, cioè

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

ciò che dà

$$e_1=d_2\,,$$

ed essendo nulla la loro somma, risulta

$$e_1=d_2=0.$$

Quindi

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\,a_1 x^2 + b_1 x y + \frac{1}{2}\,c_1 y^2 + z\left(g_1 \frac{l-z}{2} - k y\right) \\ v &= \frac{1}{2}\,a_2 x^2 + b_2 x y + \frac{1}{2}\,c_2 y^2 + z\left(g_2 \frac{l-z}{2} + k x\right) \\ w &= \frac{1}{2}\,a_3 x^2 + b_3 x y + \frac{1}{2} c_3 y^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)(g_1 x + g_2 y). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Le componenti dello spostamento del punto medio del cilindro $\left(x = y = 0, z = \frac{l}{2}\right)$ sono

$$u = \frac{1}{8}\,g_1 l^2\,, \quad v = \frac{1}{8}\,g_2 l^2\,, \quad w = 0$$

che danno il mezzo di calcolare la così detta saetta di flessione.

La determinazione delle costanti si può ottenere mercè la conoscenza del sistema di forze che sollecita la base superiore, i cui punti riferiremo al sistema di assi d'inerzia. Infatti è facile vedere che

$$R_x = 0\,, \qquad R_y = 0\,, \qquad R_z = -\int Z_z\, d\sigma$$

$$M_x = -\int y Z_z\, d\sigma = G_1 \int x y\, d\sigma + G_2 \int y^2\, d\sigma = G_2\, \sigma\, \alpha^2$$

e così

$$M_y = -G_1\, \sigma\, \beta^2\,, \quad M_z = 0$$

cioè, per le (5),

$$M_x = \frac{g_2}{s_{33}}\, \sigma\, \alpha^2\,; \quad M_y = -\frac{g_1}{s_{33}}\, \sigma\, \beta^2$$

e però nel punto di mezzo del cilindro è

$$u = -\frac{l^2 M_y}{8\,\sigma\,\beta^2}\, s_{33}, \quad v = \frac{l^2 M_x}{8\,\sigma\,\alpha^2}\, s_{33}, \quad w = 0$$

colle quali si ha un mezzo sperimentale per determinare s_{33}.

Quanto al coefficiente di torsione si ha

$$k = -\frac{1}{2\,\sigma}\left(\frac{M_x}{\alpha^2}\, s_{35} + \frac{M_y}{\beta^2}\, s_{34}\right).$$

Se il corpo ha un piano di simmetria p. e. il piano xy, come si è visto al § 7 del Cap. 5°, si ha

$$c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{56} = c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{46} = 0$$

e quindi

$$s_{35} = s_{34} = 0,$$

onde

$$k = 0;$$

se l'asse del cilindro coincide con un asse di simmetria cristallografica la torsione è nulla e si ha una flessione pura.

La flessione dipende da s_{33}. Notando che

$$c = g_1\, x + g_2\, y = s_{33}\,(G_1\, x + G_2\, y) = -\, s_{33}\, Z_z$$

si deduce

$$\frac{1}{s_{33}} = -\frac{c}{Z_z}$$

ma il secondo membro è, per definizione, il mo-

dulo di Young E, onde

$$s_{33} = \frac{1}{E}.$$

Consideriamo il caso più particolare, in cui il cilindro è soggetto a semplici pressioni normali alla base: di guisa che sia

$$R_z = -\int Z_z \, d\sigma \tag{4}$$

ed inoltre

$$R_x = R_y = M_z = 0$$

$$\int y \, Z_z \, d\sigma = \int x \, Z_z \, d\sigma = 0.$$

Riferiamo i punti della base agli assi d'inerzia baricentrici: allora

$$\int x \, d\sigma = \int y \, d\sigma = \int x \, y \, d\sigma = 0.$$

Ma tenendo presenti le (3) e inoltre

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -s_{13} Z_z ,$$

risulta

$$-(a_1 x + b_1 y + d_1) = s_{13} Z_z.$$

Moltiplicando questa equazione per $d\sigma$, $x \, d\sigma$, $y \, d\sigma$ successivamente ed integrando a tutta una sezione retta si ha subito

$$a_1 = b_1 = 0; \quad d_1 = m \, s_{13}$$

dove

$$m \sigma = R_z.$$

Dall'equazione

$$-(b_2 x + c_2 y + e_2) = s_{23} Z_z$$

collo stesso metodo si deduce

$$b_2 = 0; \quad c_2 = 0; \quad e_2 = m\, s_{23}$$

Considerando invece i due valori di $\frac{\partial w}{\partial z}$ si ottiene

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = m\, s_{33}.$$

Abbiamo poi le altre equazioni

$$-(b_3 x + c_3 y + e_3) - k x = s_{43} Z_z$$
$$-(a_3 x + b_3 y + d_3) + k y = s_{53} Z_z$$
$$-(a_2 x + d_2) - (c_1 y + e_1) = s_{63} Z_z,$$

e quindi allo stesso modo si trae

$$b_3 + k = 0, \quad c_3 = 0, \quad e_3 = m\, s_{43},$$
$$a_3 = 0, \quad b_3 - k = 0, \quad d_3 = m\, s_{53},$$
$$a_2 = 0, \quad c_1 = 0, \quad d_2 + e_1 = m\, s_{63}.$$

Possiamo supporre che la rotazione di un elemento intorno alla origine secondo l'asse z sia nulla cioè

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

per $x = y = z = 0$; quindi $d_2 = e_1$ e però l'ultima equazione ci dà

$$e_1 = \frac{1}{2} m\, s_{63}.$$

Le formule che danno le componenti degli spostamenti sono

$$\left.\begin{aligned} u &= m\left(s_{13}\,x + \frac{1}{2}\,s_{63}\,y\right) \\ v &= m\left(\frac{1}{2}\,s_{63}\,x + s_{23}\,y\right) \\ w &= m\,(s_{53}\,x + s_{43}\,y + s_{33}\,z). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

E le relative componenti di deformazione sono

$$\left.\begin{aligned} a &= m\,s_{13}, \quad b = m\,s_{23}, \quad c = m\,s_{33}, \\ f &= m\,s_{43}, \quad g = m\,s_{53}, \quad h = m\,s_{63}. \end{aligned}\right\} (7')$$

Inoltre

$$c = -\,s_{33}\,Z_z$$

quindi

$$m = \frac{R_z}{\sigma} = -\,Z_z$$

cioè la distribuzione delle forze sulla base è uniforme.

Misurando dunque la deformazione di un parallelepipedo retto ritagliato nella sostanza cristallina, misurando cioè le dilatazioni degli spigoli e gli scorrimenti, si ha un mezzo sperimentale per determinare alcune delle s e precisamente

$$s_{13},\ s_{23}\ldots,\ s_{63}.$$

Sollecitando invece allo stesso modo la faccia

$x\,z$ troveremo

$$s_{12},\ s_{22},\ \ldots,\ s_{62},$$

e sollecitando la $y\,z$ troveremo

$$s_{11},\ s_{21},\ \ldots,\ s_{61}\,;$$

verremo cioè a determinare 15 dei 21 moduli di elasticità.

Resterebbero a determinare i sei moduli

$$s_{44},\ s_{45},\ s_{46},\ s_{55},\ s_{56},\ s_{66}\,;$$

la ricerca dei quali dipende dalla risoluzione di un altro problema.

Se invece di assoggettare il prisma ad una pressione uniforme, lo deformassimo con una coppia giacente nel piano superiore otterremmo un altro metodo (che omettiamo) per la determinazione dei coefficienti s; ma si otterrebbero i coefficienti di prima e però il metodo non può valere che come metodo di prova. *

---

* Non possiamo naturalmente entrare nei particolari dei vari metodi del Voigt. Chi desiderasse approfondire la questione consulti, oltre il lavoro fondamentale citato a pag. 177, i seguenti:

Allgemeine Formeln für die Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Krystallen durch die Beob. der Biegung und Drillung von Prismen. Wied. Ann. **16**, pagine 273, 398. 1882.

U. d. Torsion eines recht. Prismas aus homogener Kryst. Substanz. Ibidem, **29**, pag. 604. 1886.

Vedi pure; *Compendio delle ricerche del prof. Voigt sull'elasticità dei cristalli;* per A. Sella, *Nuovo Cimento*, **29**, pagine 5, 137, 218. 1891; **30**, pag. 61, 1891. Ivi trovasi pure un'ampia letteratura sul soggetto. Vedi ancora la *Fisica cristallografica* del Voigt, tradotta da A. Sella, Manuali Hoepli.

§ 4. **Ricerca di una seconda deformazione.** — Ferme restando le ipotesi del § 2, supponiamo che siano nulle le componenti

$$X_x = X_y = Y_y = Z_z = 0,$$

cioè diverse da zero soltanto

$$X_z \text{ e } Y_z,$$

le quali in ogni sezione retta soddisfano la

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

ed al contorno la

$$X_z \cos(n, x) + Y_z \cos(n, y) = 0. \tag{9}$$

Anche in questo caso si tratta della determinazione delle funzioni U, V, W delle formule (2). La (8) esprime intanto che

$$X_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad Y_z = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

e quindi la (9), notando che

$$\cos(n, y) = \cos(s, x) = \frac{dx}{ds}$$

$$\cos(n, x) = -\cos(s, y) = -\frac{dy}{ds},$$

diventa

$$\frac{d\Omega}{ds} = 0$$

cioè al contorno si ha

$$\Omega = \text{cost.}$$

In altre parole l'equazione del contorno è

$$\Omega = \text{cost.} = 0.$$

D'altra parte

$$\frac{\partial w}{\partial z} = g_1 x + g_2 y + g_3 = - s_{34} Y_z - s_{35} Z_x$$

e non sussistendo alcuna relazione tra s_{34} e s_{35} occorre che le derivate di Ω siano lineari in x ed y e però che Ω sia di secondo grado in x ed y; il contorno quindi è una conica che assumeremo ellittica (o circolare).

Risulta subito allora che $\frac{\partial U}{\partial x}$ e $\frac{\partial V}{\partial y}$ sono lineari in x ed y e così pure le altre derivate; quindi come nel caso precedente U, V, W risultano polinomi di secondo grado in x ed y. Per questo nuovo problema valgono dunque le stesse formule (3).

Occupiamoci della determinazione delle costanti.

Porremo

$$2\,\Omega = m\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

m essendo una costante.

Quindi è

$$Y_z = m\,\frac{x}{a^2}, \qquad X_z = - m\,\frac{y}{b^2}.$$

e però risulta

$$R_x = R_y = R_z = M_x = M_y = 0,$$

mentre

$$M_z = -\int (x\, Y_z - y\, X_z)\, d\sigma =$$
$$= -\int m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) d\sigma;$$

ma, pei valori già trovati alla pag. 326, risulta subito

$$2\, M_z = -\, m\, \sigma$$

cioè la deformazione è prodotta da una coppia agente nel piano della base. La formula precedente determina m. Ciò posto la determinazione delle costanti si fa come nel problema precedente.

Infatti, col metodo solito, dall'equazione

$$-(a_1 x + b_1 y + d_1) = \left(s_{14} \frac{x}{a^2} - s_{15} \frac{y}{b^2}\right) m$$

risulta

$$a_1 = -\frac{m}{a^2} s_{14}, \qquad b_1 = \frac{m}{b^2} s_{15}, \qquad d_1 = 0$$

e così

$$b_2 = -\frac{m}{a^2} s_{24}, \qquad c_2 = \frac{m}{b^2} s_{25}, \qquad e_2 = 0$$

$$g_1 = -\frac{m}{a^2} s_{34}, \qquad g_2 = \frac{m}{b^2} s_{35}, \qquad g_3 = 0$$

$$b_3 + k = -\frac{m}{a^2} s_{44}, \qquad c_3 = \frac{m}{b^2} s_{45}, \; e_3 + \frac{1}{2} g_2\, l = 0$$

$$a_3 = -\frac{m}{a^2} s_{54}, \; b_3 - k = \frac{m}{b^2} s_{55}, \; d_3 + \frac{1}{2} g_1 l = 0$$

$$a_2 + b_1 = -\frac{m}{a^2} s_{64}, \; b_2 + c_1 = \frac{m}{b^2} s_{65}, \qquad e_1 + d_2 = 0.$$

Queste equazioni determinano tutti i coefficienti.

La costante k, che misura la torsione, è data da

$$k = \frac{M_z}{\sigma}\left(\frac{s_{44}}{a^2} + \frac{s_{55}}{b^2}\right)$$

e, se la sezione è circolare, da

$$k = \frac{M_z}{\pi a^4}(s_{44} + s_{55}).$$

Se quindi dopo aver assunto una direzione di assi coordinati nel corpo si ritagliano tre cilindri a base circolare e colle generatrici parallele agli assi x, y, z e si assoggettano a forze che nelle basi abbiano la distribuzione precedentemente detta e si misurano le corrispondenti torsioni k, k_1, k_2 avremo, oltre k, le

$$k_1 = \frac{M_y}{\pi a_1^4}(s_{55} + s_{66}); \quad k_2 = \frac{M_x}{\pi a_2^4}(s_{66} + s_{44})$$

e potremo quindi determinare i moduli

$$s_{44}, \; s_{55}, \; s_{66}.$$

Coi valori precedentemente trovati per le costanti, le componenti (6) di spostamento sono espresse dalle

dalle formule

$$u = -\frac{1}{2} m \left\{ \frac{s_{14}}{a^2} x^2 - \frac{2 s_{15}}{b^2} x y - \left(\frac{s_{24}}{a^2} + \frac{s_{65}}{b^2}\right) y^2 + \right.$$

$$\left. + z \left[s_{34} \frac{l - z}{a^2} - \left(\frac{s_{44}}{a^2} + \frac{s_{55}}{b^2}\right) y \right] \right\}$$

$$v = -\frac{1}{2} m \left\{ \left(\frac{s_{64}}{a^2} + \frac{s_{15}}{b^2}\right) x^2 + \frac{2 s_{24}}{a^2} x y - \frac{s_{25}}{a^2} y^2 + \right.$$

$$\left. - z \left[s_{35} \frac{l - z}{b^2} - \left(\frac{s_{44}}{a^2} + \frac{s_{55}}{b^2}\right) x \right] \right\},$$

$$w = -\frac{1}{2} m \left\{ s_{54} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) + 2 \left(\frac{s_{44}}{a^2} - \frac{s_{55}}{b^2}\right) x y + \right.$$

$$\left. + (2 z - l) \left(\frac{s_{34}}{a^2} x - \frac{s_{35}}{b^2} y\right) \right\}.$$

La misura di un coefficiente di dilatazione lineare o dello scorrimento mutuo di due rette ortogonali darà il mezzo di determinare gli altri tre moduli incogniti.

Accenniamo ad alcune proprietà della deformazione.

La sezione piana $z =$ cost. si trasforma nella superficie

$$\zeta = w$$

assumendo per piano di riferimento il piano stesso della sezione. La superficie trasformata è un paraboloide. Tenendo presente la espressione di w si vede che i termini a secondo grado in x ed y

sono costanti, non dipendono cioè dalla speciale sezione che si considera; e poichè la curvatura in un punto qualunque di tale superficie dipende dai soli termini a secondo grado, si deduce che tutte le sezioni rette si trasformano in paraboloidi aventi la stessa curvatura.

Consideriamo allora la sezione mediana

$$2z = l;$$

che si trasforma nella

$$2\zeta = -m\left\{s_{54}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) + 2\left(\frac{s_{44}}{a^2} - \frac{s_{55}}{b^2}\right)xy\right\}.$$

Diciamo r_1 e r_2 i raggi di curvatura di quelle sezioni piane della superficie che hanno per tangenti gli assi x ed y, nell'origine. Avremo

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -\frac{m}{a^2} s_{45}; \quad \frac{1}{r_2} = \frac{m}{b^2} s_{45}$$

le quali danno una semplice interpretazione del modulo s_{45}.

In quale linea si trasforma l'asse del cilindro?

Si ha, come al solito,

$$x' = -\frac{m}{2a^2} s_{34} z(l-z); \quad y' = \frac{m}{2b^2} s_{35} z(l-z)$$

$$z' = z;$$

eliminando z

$$\frac{x'}{y'} = -\frac{s_{34}}{s_{35}} \frac{b^2}{a^2}; \quad x' = -\frac{m}{2a^2} s_{34} z'(l-z');$$

l'asse si trasforma in una parabola contenuta in un piano passante per l'asse z. La curvatura, nel-

l'origine, della proiezione sul piano $x\,z$ dipende da s_{34} e quella della proiezione sul piano $y\,z$ dipende da s_{35}; di qui una interpretazione semplice di questi due moduli.

Le componenti della saetta di flessione pel punto medio sono

$$\frac{M_z\, l^2}{4\,\sigma\, a^2}\, s_{34},\ \frac{M_z\, l^2}{4\,\sigma\, b^2}\, s_{35},\ 0$$

e quindi

se l'asse del cilindro è un asse di simmetria cristallografica, una coppia il cui asse è l'asse del cilindro, produce una torsione pura, cioè senza flessione.

Si potrebbe ancora risolvere un problema più generale, nell'ipotesi che le componenti di pressione siano della forma

$$A_i + B_i\, z$$

essendo le A_i e B_i indipendenti da z *.

Si possono infine anche ricercare le soluzioni del problema di equilibrio nel caso in cui le forze non sollecitano più le basi, ma invece la superficie laterale; risolvendo, in casi particolari, pei cilindri cristallini il problema analogo a quello di Clebsch risoluto al Cap. 10° **.

---

* Vedi: *Theoretische Studien.* Precisamente la parte 3ª.

** SOMIGLIANA, *Ricerche sulla deformazione ed i fenomeni piezoelettrici in un cilindro cristallino.* Annali di Mat., **20**, 1892.

800

MANUALI HOEPLI

Pubblicati a tutto Ottobre 1903.

Ministero dell' Istruzione
Gabinetto
del Sottosegretario di Stato

Roma, 3 nov. 1900.

Ill.mo Signore
Comm. Ulrico Hoepli
Editore
MILANO.

La collezione dei Manuali Hoepli, ricca ormai di quasi 700 volumi, forma la più vasta enciclopedia di scienze, lettere ed arti finora apparsa in Italia. Meritano lode certamente e gli autori, che in forma lucida e breve hanno preparato così valido ausilio alla gioventù studiosa, e l'editore che ha saputo scegliere, tra le varie discipline, quelle che meglio valgono a formare un complesso di cognizioni indispensabili alla cultura moderna.

firmato:

ENRICO PANZACCHI.

Sotto Segretario di Stato
Ministero della Pubbl. Istruzione.

Il Ministro
per l'Agricoltura, l' Industria
e il Commercio

Roma, 25 ott. 1900.

Ill. sig. Comm. U. Hoepli,
Milano.

La larga accoglienza fatta alla collezione dei manuali editi dalla Sua benemerita Casa, deve certo formare la migliore e più ambita ricompensa per la S. V. Ill.ma, che con intelligente cura ne dirige la pubblicazione.

Questo Ministero ha avuto più volte occasione di fermare la sua attenzione sui lavori che più direttamente riguardano l' agricoltura, la zootecnia e le industrie ad esse attinenti, trovandoli rispondenti allo scopo, che la S. V. Ill.ma si propone di conseguire.

Mi torna quindi gradito di esprimerne a Lei il mio sincero compiacimento, mentre Le auguro che sempre maggior favore abbia ad incontrare codesta Sua utile raccolta

firmato: CARCANO.
Min. dell'Agr., Ind. e Comm.

Industrie diverse.

Abiti per signora
Acetilene
Acido solforico
Alcool industriale
Apicoltura
Arti grafiche
Asfalto
Bachi da seta
Biancheria
Carta (Industria d.)
Cognac
Colori e vernici
Commerc. (Man. del)
Commercio (Storia d.)
Concia pelli
Distillazione del legno
Id. delle vinacce
Elettricità e appl. vedi al gruppo *Elettricità*
Fabbro ferraio
Falegname ebanista
Filatura e tessitura
Fiori artificiali
Fonditore di metalli
Fotografia:
Carte fotografiche
Fotografia:
Dizionario fotogr.
Fotocromatografia
Fotog. industriale
Fotog. ortocromat.
Fotog. p. dilettanti
Fotogrammetria
Fotosmaltografia
Processi fotomecc.
Proiezioni fotog.
Ricettario fotog.
Spettrofotometria
Gaz illuminante
Gioielleria, oreficeria
Imitazioni e succedanei
Incandescenza a gaz
Industria frigorifera
Litografia
Macchine per cucire
Marmista
Meccanica
Meccanico
Metalli preziosi
Modellatore meccan.
Naturalista preparat.
Operaio
Orologeria
Ostricoltura
Panificazione
Piante industriali
Id. tessili
Piccole industrie
Pietre preziose
Pirotecnia
Piscicoltura
Pomologia artificiale
Ricettario domestico
Id. industriale
Saggiatore
Saponi (Industria dei)
Seta (Industria d.)
Specchi (Fabbric.)
Stearica (Industria)
Tessuti di lana e cot.
Tipografia
Tintore
Tintura della seta
Tornitore meccanico
Trine a fuselli
Vernici, lacche, inch.
Vetro
Zucchero

Fisica e Chimica.

Acetilene
Acido solforico
Adulterazione alim.
Alcool
Analisi chimica qual.
Analisi vino
Id. volumetrica
Calore
Chimica
Id. agraria
Id. analitica
Id. appl. a. igiene
Id. clinica
Id. legale
Chimico industriale
Climatologia
Cognac
Concimi
Conservaz. sost. alim.
Dinamica
Disinfezione
Distillazione del legno
Id. delle vinacce
Elettrochimica
Energia fisica
Esplodenti
Farmacista
Farmacoterapia
Fisica
Fisica cristallografica
Fotografia (v. al gruppo *Industrie*)
Fulmini e parafulmini
Galvanoplastica
Galvanizzazione
Galvanostegia
Gravitazione
Igroscopi, igrom.
Latte, burro, cacio
Liquorista
Luce e colori
Id. e suono
Meteorologia
Microscopio
Olii veget. miner.
Ottica
Profumiere
Sieroterapia
Spettroscopio
Termodinamica
Tintore
Tintura di seta

Storia Naturale.

Acque miner. e term.
Anatom. e fisiol. comp.
Anatomia microscop.
Anatomia vegetale
Animali parass. uomo
Antropologia
Batteriologia
Biologia animale
Botanica
Cane
Cavallo
Coleotteri
Colombi domestici
Coniglicoltura
Cristallografia
Ditteri
Embriol e morfol. gen.
Fiori artificiali
Floricoltura
Fisica cristallografica
Fisiologia
Id. vegetale
Frutticoltura
Frutta minori
Funghi mangerecci
Geologia
Imenotteri ecc.
Insetti nocivi
Id. utili
Ittiologia
Lepidotteri
Majale
Malattie crittog.
Metalli preziosi
Mineralogia gener.
Id. descritt.
Naturalista preparat.
Naturalista viaggiat.
Orticoltura
Ostricoltura e mitil.
Paleoetnologia
Paleontologia
Piante e fiori
Pietre preziose
Piscicoltura
Pollicoltura
Pomologia
Protistologia
Selvicoltura
Sismologia
Tabacco
Tartufi e funghi
Tecnica protistol.
Uccelli canori
Vulcanismo
Zoologia

Medicina, Chirurgia, Igiene.

Acque miner. e term.
Analisi chimica qual.
Anatomia e fis. comp.
Anatomia microscop.
Anatomia topograf.
Animali parass. uomo
Antropometria
Aromatici
Assistenza infermi
Id. pazzi
Batteriologia
Biologia animale
Chimica appl. a. igiene
Chimica clinica
Chimica legale (toss.)
Chirurg. operativa
Climatologia
Disinfez. (Pratica d.)
Embriologia
Epilessia
Farmacista
Farmacoterapia
Fisiologia
Fototerapia
Idroterapia
Igiene della bocca
Id. del lavoro
Id. vita pubblica
Id. della pelle
Id. privata
Id. rurale
Id. scolastica
Id. veterinaria
Id. della vista
Immunità malattie
Impiego ipodermico
Infortuni d. montagna
Legislazione sanitaria
Luce e salute
Malatt. dei paesi caldi
Malattie del sangue
Massaggio
Materia medica
Medicatura antisett.
Medico pratico
Microbiologia
Microscopio
Morte vera e app.
Nevrastenia
Nutrizione bamb.
Organoterapia
Ortofrenia
Ostetricia
Pellagra
Protistologia
Psichiatria
Psicologia fisiol.
Psicoterapia
Rachitide
Radioterapia
Röntgen (Raggi)
Semejotica
Sieroterapia
Soccorsi d'urgenza
Spettrofotometria
Terapia infanzia
Tisici e sanatori
Ufficiale sanitario
Veleni
Zoonosi

Elettricità.

Cavi telegrafici
Correnti elettr. altern.
Distillazione del legno
Elettricità
Elettrotecnica
Elettrochimica
Fulmini e parafulmini
Galvanizzazione
Galvanoplastica
Galvanostegia
Illuminazione elettric
Magnetis. e elettricità.
Metallocromia
Röntgen (Raggi di)
Telefono
Telegrafia
Telegrafia senza fili
Unità assolute

Tecnologia, Ingegneria, Costruzioni, ecc.

Abitazioni anim. dom.
Architettura
Aritmetica e Geom. op.
Asfalto
Atlante di macchine
Automobilista
Calcestruzzo
Calci e cementi
Calderaio
Casa dell'avvenire
Case operaie
Ciclista
Coltivazione miniere
Conti e calcoli fatti
Cubatura legnami
Curve circolari
Decoraz. e indust. art.
Dinamica
Disegnatore meccan.
Disegno assonometr.
Id. geometrico
Id. industriale
Id. di projez. ort.
Id. (Gramm. del)
Dizionario tecnico
Fabbricati civili
Fabbro ferraio
Falegname-ebanista
Fognatura cittadina
Id. domestica
Fonditore in metalli
Fotogrammetria
Gaz illuminante
Gnomonica
Idraulica
Imitazioni e succed.
Incandescenza a gaz
Industrie (Piccole)
Infortuni sul lavoro (Mezzi p. prevenirli)
Ingegnere civile
Ingegneria legale
Lavori marittimi
Lavori in terra
Leggi lavori pubblici
Leghe metalliche
Macchine a vapore
Id. agricole
Id. per cucire
Macchinista e fuochist.
Marmista
Meccanica
Meccanico
Meccanismi (500)
Miniere
Modellatore meccanic.
Molini
Momenti resistenti
Montatore d. macchine
Operaio
Orologeria
Peso metalli
Prontuario d. agricoltore e d. ingegnere rurale
Prospettiva
Regolo calcolatore
Resistenza d. materiali
Scaldamento e ventil.
Siderurgia
Stereometria
Strumenti metrici
Tavole d'alligazione
Tempera e cementaz.
Termodinamica
Tornitore
Zolfo

Matematiche.

Algebra elementare
Id. compl. I anal.
Id. Id. II equaz.
Id. (Esercizi di)
Aritmetica pratica
Id. razionale
Id. (Eserc. di)
Id. e geom. d. op.
Astronomia
Id. nautica
Id. n. antico test.
Calcolo infin. I calc. diff
Id. II integrale
Id. III d. variaz.
Id. (Esercizi di)
Celerimensura
Compensazione errori
Computisteria
Conti e calcoli fatti
Cubatura legnami
Curve circolari
Determinanti
Disegno assonometr.
Disegno geometrico
Id. industriale
Id. di projezioni
Id. topografico
Economia matematica
Esercizi. d. geom. elem.
Id. di Trigonom.
Euclide (L') emendato
Formulario di matem.
Fotogrammetria
Funzioni analitiche
Id. ellittiche
Geometr. anal. d. piano
Id. Id. d. spazio
Id. descrittiva
Id. metr. e trig.
Id. pratica
Id. proj. d. piano
Id. Id. d. spazio
Id. pura
Id. e trig. d. sfera
Gnomonica
Gruppi di trasformaz.
Gravitazione
Interesse e sconto
Logaritmi
Logica matematica
Logismografia
Matematica (compl. di)
Matematiche superiori
Metrologia
Peso metalli
Problemi di geometr.
Prospettiva
Ragioneria
Id. d. cooper.
Id. industrial.
Ragioniere (pront. d.)
Regolo calcolatore
Repertor. di matemat.
Stereometria
Strumenti metrici
Telemetria
Teoria dei numeri
Id. d. ombre
Termodinamica
Triangolazioni topog.

Amministrazione pubblica
Diritto e Giurisprudenza.

Assicurazione
Id. e stima danni
Avarie e sinistri mar.
Beneficenza
Bonifiche
Catasto
Chimica applicata
Codice del bollo
Id. doganale
Id. civile
Id. proced. civile
Id. commercio
Id. pen. e proc. pen.
Id. di marina
Id. pen. p. l'eserc.
Id. del teatro
Id. d. perito misur.
Cod. e leggi us. d'Italia
Computisteria
Conciliatore
Contabilità comunale
Id. dello Stato
Cooperative rurali
Cooperazione
Curatore dei fallimen.
Debito pubblico
Digesto
Diritti e dov. d. cittad.
Diritto amministrativ.
Id. civile
Id. commerciale
Diritto costituzionale
Id. Ecclesiastico
Id. Intern. pubbl.
Id. Id. privato
Id. penale
Id. Id. romano
Id. romano
Economia politica
Esattore comunale
Estimo dei terreni
Id. rurale
Fognatura cittadina
Giurato (Man. del)
Giurisdizione volont.
Giustizia amministr.
Igiene scolastica
Id. veterinaria
Imposte dirette
Infortuni sul lavoro
Ingegneria legale
Interesse e sconto
Ipoteche
Lavoro donne e fanc.
Legge comunale
Id. sui lav. pubbl.
Id. s. ordin. giud.
Id. infort. s. lavoro
Id. s propr. letter.
Id. s. diritti d'aut.
Id. s. priv. industr.
Legge s. sanità e sicurezza pubblica
Legge sulle tasse di registro e bollo
Legislazione sanitaria
Legislazione rurale
Logismografia
Mandato commerciale
Notaio
Ordinam. Stati d'Eur.
Id. Id. f. d'Eur.
Paga giornaliera
Posta
Produz. e commer. vino
Prontuario d. agricolt.
Id. d. ragion.
Proprietario di case
Ragioneria
Ragioneria d. Cooper.
Id. industriale
Ricchezza mobile
Scienza d. finanze
Scritture d'affari
Socialismo
Società di mut. soccor.
Id. industriali
Sociologia generale
Statistica
Testamenti
Trasporti e tariffe
Valori pubblici

Archeologia, Belle Arti.

Amatore oggett. d'arte
Anatomia pittorica
Antichità greche
Id. priv. d. rom.
Id. pubbl. rom.
Armi antiche
Araldica
Archeol. d. arte greca
Id. d. arte etr. rom.
Architettura
Armi antiche
Arti grafiche fotomec.
Atene
Calligrafia
Colori e pittura
Decoraz. e ind. artist.
Disegno
Id. (Gramm. del)
Fiori artificiali
Fotosmaltografia
Gioielleria, oreficeria
Guida numismatica
Litografia
Luce e colori
Majoliche e porcellane
Marmista
Mitologia
Monete greche
Id. romane
Monogrammi
Numismatica
Ornatista
Paleografia
Paleoetnologia
Pittura italiana
Id. ad olio
Prospettiva
Ristauratore dipinti
Scoltura
Storia dell'arte
Teoria d. ombre
Topografia di Roma
Vocabolarietto numis.
Vocabolario araldico

Storia e Geografia.

Acque minerali
Alpi
Astronomia (L') n. antico testamento
Atlante st. geog. d. Ital.
Id. geog. univers.
Cartografia
Climatologia
Commercio (Storia d.)
Cosmografia
Cristoforo Colombo
Cronologia
Id. scop. geog.
Dizionario alpino
Id. geografico
Dizionario dei comuni d'Italia
Dizionario biografico
Esercizi geografici
Etnografia
Geografia
Id. classica
Id. fisica
Id. commercial.
Geologia
Islamismo
Leggende popolari
Manzoni A.
Mare
Mitologia
Omero
Paleoetnologia
Prealpi bergamasche
Prontuario di geograf.
Rivoluzione francese
Shakespeare
Sismologia
Statistica
Storia antica
Id. d. arte militare
Id. del commercio
Id. d'Italia
Id. di Francia
Id. d'Inghilterra
Id. e cronologia
Topografia di Roma
Vulcanismo

Erudizione, Bibliografia, ecc.

Amatore oggetti d'art.
Id. di maioliche
Armi antiche
Atene
Autografi
Bibliografia
Bibliotecario
Classificaz. d. scienze
Crittografia
Dizionario bibliograf.
Id. biografico
Id. stenograf.
Id. abbreviat.
Enciclopedia Hoepli
Epigrafia latina
Errori e pregiudizi
Evoluzione (storia d.)
Grafologia
Leggende popolari
Litografia
Paleoetnologia
Paleografia
Raccoglitore
Stenografia
Stenografo
Tipografia

Filosofia, Pedagogia, Religione.

Bibbia
Buddismo
Didattica
Diritto ecclesiastico
Estetica
Etica
Evoluzione
Filosofia morale
Giardino infantile
Grafologia
Igiene scolastica
Imitazione Cristo
Logica
Mitologia
Psicologia
Id. fisiologica
Id. musicale
Protezione animali
Ortofrenia
Religioni dell'India
Sordomuto

Arte militare, Nautica.

Amatore oggetti d'art
Armi antiche
Attrezzatura navale
Avarie e sinistri mar.
Canottaggio
Codice cavalleresco
Costruttore navale
Disegno e costruz. navi
Doveri macchin. naval.
Duellante
Esplodenti
Filonauta
Flotte moderne
Ingegnere navale
Lavori marittimi
Macchinista navale
Marine da guerra
Marino
Meccanica del macchinista di bordo
Nautica stimata
Pirotecnia
Scherma
Storia arte militare
Telemetria
Ufficiale

Letteratura, Linguistica, Filologia.

Arabo parlato
Arte del dire
Conversaz. Ital.-Ted.
Id. Ital.-Fran.
Corrisp. comm. italian.
Id. Id. spagn.
Id. Id. franc.
Crittografia
Dantologia
Dialetti italici
Id. grechi
Dizion. abbrev. latine
Id. bibliografico
Id. Eritreo
Id. Milanese
Id. Olandese
Id. Tedesco
Id. univ. in 4 ling.
Dottrina pop. in 4 ling.
Enciclopedia Hoepli
Esercizi greci
Id. latini
Id. di traduzione della gramm. franc.
Esercizi di traduzione della gramm. tedesc.
Filologia classica
Florilegio poet. greco
Fonologia italiana
Id. latina
Fraseologia francese
Glottologia
Grammatica albanese
Grammat. dan.-norv.
Id. ebraica
Id. Francese
Id. Galla (Orom.)
Id. Greca
Id. Greca-mod.
Id. Inglese
Id. Italiana
Id. Latina
Id. Olandese
Id. Portoghese-Brasiliana
Grammat. Rumena
Id. Russa
Id. Slovena
Id. Spagnuola
Id. Svedese
Id. Tedesca
Id. Turca osm.
Leggende popolari
Letteratura albanese
Id. american.
Id. araba
Id. assira
Id. catalana
Id. dramm.
Id. ebraica
Id. egiziana
Id. francese
Id. greca
Id. indiana
Id. inglese
Id. italiana
Letteratura norveg.
Id. persiana
Id. provenz.
Id. romana
Id. spagnuol.
Id. tedesca
Id. ungheres.
Id. slava
Lingua gotica
Lingue d'Africa
Id. neo-latine
Id. straniere
Metrica d. greci e rom.
Morfologia greca
Id. italiana
Omero
Paleografia
Relig. e ling. di India
Rettorica
Ritmica italiana
Sanscrito
Shakespeare
Sintassi francese
Sintassi latina
Stilistica
Stilistica latina
Tavole divina comm.
Tigrè
Traduttore tedesco
Verbi greci
Id. latini
Vocabol. lingua Russa
Volapuk

Musica, Sport.

Acrobatica e atletica
Alpinismo
Amatore oggetti d'art.
Armonia
Armi antiche
Automobilista
Ballo
Biliardo
Cacciatore
Cane (Allevatore del)
Canottaggio
Canto (Il)
Cantante
Cavallo
Chitarra
Ciclista
Codice cavalleresco
Dizionario alpino
Id. filatetico
Dizionario delle corse
Duellante
Filonauta
Ginnastica femminile
Id. maschile
Id. (Storia d.)
Giuochi ginnastici
Giuoco del pallone
Infortuni d. montagna
Lawn-Tennis
Mandolinista
Nuotatore
Pianista
Proverbi sul cavallo
Psicologia musicale
Scacchi
Scherma
Storia della musica
Strumentazione
Strumenti ad arco

Elenco completo dei ***MANUALI HOEPLI*** *disposti in ordine alfabetico per materia.*

L. c.

Abitazione degli animali domestici, del Dott. U. BARPI, di pag. XVI-372, con 168 incisioni . . . . . 4 —

Abitazioni — *vedi* Fabbricati civili.

Abitazioni popolari — *vedi* Case operaie.

Abiti per signora (Confezione di) e l'arte del taglio, compilato da EMILIA COVA, di pag. VIII-91, con 40 tavole . 3 —

Abbreviature — *vedi* Dizionario abbreviature — Dizionario stenografico.

Acetilene (L') di L. CASTELLANI 2.ª ediz. di p. XVI-164 . 2 —

Acido solforico, Acido nitrico, Solfato sodico, Acido muriatico (Fabbricazione dell'), del Dott. V. VENDER, di pag. VIII-312, con 107 incisioni e molte tabelle. . . . 3 50

Acque (Le) **minerali e termali del Regno d'Italia,** di LUIGI TIOLI. Topografia - Analisi - Elenchi - Denominazione delle acque - Malattie per le quali si prescrivono - Comuni in cui scaturiscono - Stabilimenti e loro proprietari - Acque e fanghi in commercio - Negozianti d'acque minerali, di pag. XXII-552 . . . . . 5 50

— *vedi anche* Legislazione delle.

Acrobatica e atletica di A. ZUCCA, di pag. XXX-267, con 100 tavole e 42 incisioni nel testo 6 50

Acustica — *vedi* Luce e suono.

Adulterazioni e falsificazioni (Dizionario delle) **degli alimenti,** del Dott. Prof. L. GABBA (è in lavoro la 2ª ediz.).

Agricoltore (**Prontuario dell'**) e dell'ingegnere rurale, dell'Ing. V. NICCOLI, 3ª edizione riveduta ed ampliata, di pagine XL-500, con 30 incisioni 5 50

— (**Il libro dell'**) Agronomia, agricoltura, industrie agricole del Dott. A. BRUTTINI, di pag. XX-446 con 303 figure . 3 50

Agronomia, del Prof. CAREGA DI MURICCE, 3ª ediz. riveduta ed ampliata dall'autore, di pag. XII-210. . . . . 1 50

Agronomia e agricoltura moderna, di G. SOLDANI, 2ª ed. di pag. VIII-416 con 134 incisioni e 2 tav. cromolit. . . 3 50

Agrumi (Coltivazione, malattie e commercio degli), di A. ALOI, con 22 incisioni e 5 tavole cromolit., pag. XII-238 3 50

Alcool (Fabbricazione e materie prime), di F. CANTAMESSA di pag. XII-307, con 24 incisioni . . . . . 3 —

Alcool industriale, di G. CIAPETTI. Produzione dell'alcole industriale dal punto di vista dell'agricoltura italiana, applicazione dell'alcole denaturato alla fabbricazione dell'aceto e delle vinacce, alla produzione della forza motrice, al riscaldamento e alla illuminazione con 105 illustrazioni, di pag. XII-262 . . . . . 3 —

Algebra complementare, del Prof. S. PINCHERLE:

Parte I. *Analisi Algebrica,* di pag. VIII-174 . . . . 1 50

Parte II. *Teoria delle equazioni,* pag. IV-169 con 4 inc. 1 50

L. c.

Algebra elementare, del Prof. S. PINCHERLE, 8ª ediz. di pag. VIII-210 e 2 incisioni 1 50

— **(Esercizi di),** del Prof. S. PINCHERLE, di pag. VIII-135, con 2 incisioni. 1 50

Alighieri (Dante) — *vedi* Dantologia.

Alimentazione, di G. STRAFFORELLO, di pag. VIII-122 . 2 —

Alimentazione del bestiame, dei Proff. MENOZZI E NICCOLI, di pag. XVI-400 con molte tabelle . . . . . 4 —

Allattamento — *vedi* Nutrizione del bambino.

Alligazione per l'oro e per l'argento — *vedi* Leghe - Tavole.

Alluminio (L'), di C. FORMENTI, di pag. XXVIII-324 . . . 3 50

Aloè — *vedi* Prodotti agricoli.

Alpi (Le), di J. BALL, trad. di I. CREMONA, pag. VI-120 . 1 50

Alpinismo, di G. BROCHEREL, di pag. VIII-312 . . . . 3 —

Amalgame — *vedi* Leghe metalliche.

Amatore (L') **di oggetti d'arte e di curiosità,** di L. DE MAURI, di 600 pag. adorno di numerose incis. e marche. Contiene le materie seguenti: Pittura - Incisione - Scoltura in avorio - Piccola scoltura - Vetri - Mobili - Smalti - Ventagli - Tabacchiere - Orologi - Vasellame di stagno - Armi ed armature - Dizionario complementare di altri infiniti oggetti d'arte e di curiosità, di pag. XII-580. . . . . 6 50

Amianto — *vedi* Imitazioni.

Anagrammi. — *vedi* Enimmistica.

Analisi chimica qualitativa di sostanze minerali e organiche e ricerche tossicologiche, ad uso dei laboratori di chimica in genere e in particolare delle Scuole di Farmacia, del Prof. P. E. ALESSANDRI. 2ª ediz. intieramente rifatta, di pag. XII-384, con 14 inc. numerose tabelle e 5 tav. cromolitografiche 5 —

Analisi di sostanze alimentari. — *vedi* Chimica applicata all'Igiene.

Analisi delle Urine. — *vedi* Chimica clinica.

Analisi del vino, ad uso dei chimici e dei legali, del Dott. M. BARTH, traduzione del Prof. E. COMBONI, 2ª edizione italiana interamente riveduta ed ampliata dal traduttore, di pag. XVI-140. con 8 inc. intercalate nel testo . . . 2 —

Analisi volumetrica applicata ai prodotti commerciali e industriali, del Prof. P. E. ALESSANDRI, pag. X-342. con inc. 4 50

Ananas. — *vedi* Prodotti agricoli.

Anatomia e fisiologia comparate, del Prof. R. BESTA, di pag. VII-218 con 34 incisioni 1 50

Anatomia microscopica (Tecnica di), del Prof. D. CARAZZI, di pag. XI-211, con 5 incisioni 1 50

L. c.

Anatomia pittorica, del Prof. A LOMBARDINI, 2ª ediz. riveduta e ampliata, di pag. VIII-168, con 53 inc. . . . 2 —

Anatomia topografica, del Dott. Prof. C. FALCONE, di pag. XV-395, con 30 incisioni . . . . . 3 —

Anatomia vegetale, del Dottor A. TOGNINI, di pagine XVI-274 con 41 incisioni . . . . . 3 —

Animali da cortile, del Prof. P. BONIZZI, di pag. XIV-238 con 39 incisioni. (La 2ª ediz. è in preparazione).

Animali (Gli) **parassiti dell'uomo,** del Prof. F. MERCANTI, di pag. IV-179, con 33 incisioni 1 50

Antichità greche, del Prof. V. INAMA. (In lavoro).

Antichità private dei romani, del Prof. N. MORESCHI. 3ª edizione interamente rifatta del Manuale di W. KOPP, di pag. XVI-181 con 7 incisioni 1 50

Antichità pubbliche romane di J. G. HUBERT, rifacimento delle antichità romane pubbliche, sacre e militari di W. KOPP, traduzione del Dott. A. WITTGENS, di pag. XIV-324, con 18 figure intercalate nel testo e una pianta . . 3 —

Antisettici — *vedi* Medicatura antisettica.

Antologia stenografica, di E. MOLINA (In lavoro),

Antropologia, del Prof. G. CANESTRINI, 3ª ediz., di pag. VI-239 con 21 incisioni. 1 50

Antropometria, di R. LIVI, di pag. VIII-237 con 32 incis. 2 50

Apicoltura, del Prof. G. CANESTRINI, 3ª ediz. riveduta di pag. IV-215 con 43 incisioni . . . . . 2 —

Appalti — *vedi* Ingegneria legale.

Arabo parlato (L') in Egitto, grammatica, frasi, dialoghi e raccolta di oltre 6000 vocaboli del Prof. A. NALLINO. (Nuova ediz. dall'*Arabo volgare* di DE STERLICH e DIB KHADDAG) di pag. XXVIII-386 . . . . . 4 —

Araldica (Grammatica), di F. TRIBOLATI, 4ª ediz. rifatta da G. DI CROLLALANZA. (In lavoro).

Aranci — *vedi* Agrumi.

Archeologia. Arte Greca, del Prof. I. GENTILE (esaurito). È in preparazione una nuova ediz. rifatta del Prof. S. RICCI

Archeologia e Storia dell'arte italica, etrusca e romana. 3ª ediz. intier. rifatta. Un vol. di testo con intr. bibliogr. ed appendici sulle ultime scoperte e questioni archeol. di pag. XXXIV-346 con 96 tav. nel testo a cura del Prof. S. RICCI e un vol. di 79 tav. e in. a cura del Prof. I. GENTILE 7 50

Architettura (Manuale di) **italiana,** antica e moderna, di A. MELANI, 4ª edizione completata ed arricchita, con 136 tav. e 67 incis. intercalate nel testo di pag. XXV-559 7 50

L. c.

Argentatura — *vedi* Galvanizzazione — Galvanoplastica — Galvanostegia — Metallocromia — Metalli preziosi — Piccole industr.

Aromatici e Nervini nell'alimentazione. I condimenti, l'alcool (Vino, Birra, Liquori, Rosolii, ecc.). Caffè, Thè Matè, Guarana, Noce di Kola, ecc. — Appendice sull'uso del Tabacco da fumo e da naso; del Dott. A. VALENTÌ . . 3 —

Aritmetica pratica, del Prof. Dott. F. PANIZZA. 2ª edizione riveduta, di pag. VIII-188 . . . . . 1 50

Aritmetica razionale, del Prof. Dott. F. PANIZZA, 4ª edizione riveduta di pag. XII-210 . . . . . 1 50

— **(Esercizi di),** del Prof. Dott. F. PANIZZA, di p. VIII-150 1 50

Aritmetica (L') **e Geometria dell'operaio,** di EZIO GIORLI, di pag. XII-183, con 74 figure . . . . . 2 —

Armi antiche (Guida del raccoglitore e dell'amatore di) di J. GELLI, di pag. VIII-388, con 9 tavole fuori testo, 482 incisioni nel testo e 14 tavole di marche 6 50

Armonia (Manuale di), del Prof. G. BERNARDI, con prefazione di E. ROSSI di pag. XII-288 . . . . . 3 50

Arte del dire (L'), di D. FERRARI, Manuale di rettorica per lo studente delle Scuole secondarie. 5ª ediz. corr., (10, 11 e 12 migliaio), pag. XVI-350 e quadri sinottici . . . 1 50

Arte della memoria (L'), sua storia e teoria (parte scientifica). Mnemotecnia Triforme (parte pratica) del Generale B. PLEBANI, di pag. XXXII-224 con 13 illustr. 2 50

Arte mineraria. — *vedi* Miniere (Coltivazione delle).

Arte salutare — *vedi* Memoriale dei Medici pratici.

Arti (Le) **grafiche fotomeccaniche,** ossia la Eliografia nelle diverse applicaz. (Fotozincotipia, fotozincografia, fotocromolitografia, otolitografia, fotocollografia, fotosilografia, tricromia, fotocollocromia, elioincisione, ecc. secondo i metodi più recenti, con un Dizionarietto tecnico e un cenno storico sulle arti grafiche; 3ª ediz. corr. e accresciuta ed in parte rifatta, con molte illustr. di pag. XVI-238 . . . 2 —

Asfalto (L'), fabbricazione, applicazione, dell'Ing. E. RIGHETTI. con 22 incisioni, di pag. VIII-152. . . . . 2 —

Assicurazione in generale, di U. GOBBI, di pag. XII-308. 3 —

Assicurazione sulla vita, di C. PAGANI, di pag. VI-161.. 1 50

Assicurazioni (Le) **e la stima dei danni** nelle aziende rurali, con appendice sui mezzi contro la grandine, del Dr. A. CAPILUPI, di pag. VIII-284, 17 incisioni 2 50

Assistenza degl'infermi nell'ospedale ed in famiglia, del Dott. C. Calliano, 2ª ediz., pag. XXIV-448. 7 tav. 4 50

Assistenza dei pazzi nel manicomio e nella famiglia, del Dr. A. PIERACCINI, e prefaz. del prof. E. MORSELLI, pag. 250 2 50

Astronomia, di J. N. LOCKYER, nuova versione libera con note ed aggiunte del Prof. G. CELORIA, 4ª ediz. (esaurito, è in lavoro la 5ª edizione).

L. c.

Astronomia (L') nell'antico testamento. di G V. SCHIAPARELLI, di pag. 204 . . . . . 1 50

Astronomia nautica, del prof. G. NACCARI, di pag. XVI-320, con 45 incis. e tav. numeriche . . . . . 3 —

Atene. Brevi cenni sulla città antica e moderna, seguiti da un saggio di Bibliografia descrittiva e da una Appendice Numismatica, di S. AMBROSOLI, con un panorama e una pianta d'Atene, 22 tav. e varie incisioni nel testo . . . 3 50

Atlante geografico-storico d'Italia, del Dott. G. GAROLLO, 24 tav. con pag. VIII-67 di testo e un'appendice . . . 2 —

Atlante geografico universale, di R. KIEPERT, 26 carte con testo. *Gli Stati della terra* del Dott. G. GAROLLO. 10ª ediz. aumentata e corretta (dalla 91.000ª alla 100.000ª copia) pag. VIII-88 . . . . . 2 —

Atletica — *vedi* Acrobatica.

Atmosfera — *vedi* Igroscopi e igrometri.

Attrezzatura, manovra navale, segnalazioni marittime e Dizionarietto di Marina, di F. IMPERATO, 3ª edizione ampliata, di pag. XXIV-648, con 330 incis. e 28 tav. in cromolit. riproducenti le bandiere maritt. di tutte le naz. 6 50

Autografi (L'amatore d'), del conte E. BUDAN con 361 facsimili di pag. XIV-426 . . . . . 4 50

Autografi (Raccolte e raccoglit. di) in Italia di C. VANBIANCHI, di pag. XVI-376, 102 tav. di facsimili d'aut. e rit. . 6 50

Automobilista (Nanuale dell') **e guida del meccanico conduttore d'automobili.** Trattato sulla costruzione dei veicoli semoventi, dedicato agli automobilisti italiani, agli amatori d'automobilismo in genere, agli inventori, ai dilettanti di meccanica ciclistica, ecc., di G. PEDRETTI, di pag. XXIV-480, con 181 incisioni 5 50

Avarie e sinistri marittimi (Manuale del regolatore e liquidatore di) del Rag. V. ROSSETTO. Appendice: Breve dizionario di terminologia tecnico navale e commerciale marittimo inglese-italiano. Ragguaglio dei pesi e misure inglesi con le italiane. Di pag. XV-496, con 25 fig. in 6 tav. 5 50

Avicoltura — *vedi* Animali da ortile — Colombi — Pollicoltura.

Avvelenamenti — *vedi* Veleni.

Bachi da seta, del Prof. F. NENCI. 3ª ediz. con note ed aggiunte, di pag. XII-300, con 47 incis. e 2 tav. . . . 2 50

Balistica — *vedi* Armi antiche — Esplodenti — Pirotecnia — Storia dell'arte militare.

Ballo (Manuale del) di F. GAVINA, di pag. VIII-249, con 92 figure. Contiene: Storia della danza - Balli girati - Cotillon - Danze locali - Feste di ballo - Igiene del ballo. 2 50

Bambini — *vedi* Nutrizione dei — Ortofrenia — Terapia.

Barbabietola da zucchero — *vedi* Zucchero.

L. c.

Batteriologia, dei Professori G. e N. CANESTRINI, 2ª ediz. in gran parte rifatta, di pag. X-274 con 37 incis. . . . 1 50

Beneficenza (Manuale della), del Dott. L. CASTIGLIONI, con appendice sulle contabilità delle istituzioni di pubblica beneficenza, del Rag. G. ROTA, di pag. XVI-340. . . . 3 50

Bestiame (Il) e l'agricoltura in Italia, del Prof. E. ALBERTI, di pag. VIII-312, con 22 zincotipie 2 50

— Vedi Abitazioni di animali — Alimentazione d. bestiame — Cavallo — Coniglicoltura — Igiene veterinaria — Majale - Pollicoltura - Razze bovine - Zoonosi - Zootecnica.

Biancheria (Disegno, taglio e confezione di), Manuale teorico pratico di E. BONETTI, con un Dizionario di nomenclatura, 2ª edizione riveduta e aumentata, di pag. XVI-202 con 50 tavole illustrative e 5 prospetti . . . . . 3 —

Bibbia (Man. della), di G. M. ZAMPINI, di pag. XII-308 . 2 50

Bibliografia, di G. OTTINO, 2ª edizione riveduta, di pag. IV-166, con 17 incisioni . . . . . 2 —

Bibliotecario (Manuale del), di G. PETZHOLDT, tradotto sulla 3ª edizione tedesca, con un'appendice originale di note illustrative, di norme legislative ed amministrative e con un elenco delle pubbliche biblioteche italiane e straniere, per cura di G. BIAGI e G. FUMAGALLI di pagine XX-364-CCXIII 7 50

Biliardo (Il giuoco del), di J. GELLI, di pag. XV-179, con 79 illustrazioni 2 50

Biografia — *vedi* Cristoforo Colombo — Dantologia — Dizionario biografico — Manzoni — Napoleone I — Omero — Shakespeare.

Biologia animale (Zoologia generale e speciale) per Naturalisti, Medici e Veterinarii del Dott. G. COLLAMARINI, di pag. X-426 con 23 tavole . . . . . 3 —

Bollo — *vedi* Codice del bollo — Leggi registro e bollo.

Bonificazioni (Manuale amministrativo delle) di C. MEZZANOTTI, di pag. XII-294. . . . . 3 —

Borsa (Operaz. di) — *vedi* Debito pubblico — Valori pubblici.

Boschi — *vedi* Selvicoltura.

Botanica, del Prof. I. D. HOOKER, traduzione del Prof. N. PEDICINO, 4ª ediz., di pag. VIII-134, con 68 incisioni . 1 50

Botti — *vedi* Enologia.

Bronzatura — *vedi* Metallocromia — Galvanostegia.

Bronzo — *vedi* Leghe metalliche.

Buddismo, di E. PAVOLINI, di pag. XVI-164 . . . . . 1 50

Burro — *vedi* Latte — Caseificio.

Cacciatore (Manuale del), di G. FRANCESCHI, 2ª edizione rifatta, di pag. XIII-315, con 41 incisioni 2 50

Cacio — *vedi* Bestiame — Caseificio — Latte, ecc.

Caffè — *vedi* Prodotti agricoli.

L. c.

Calcestruzzo (Costruzioni in) **ed in cementi armati,** di G. VACCHELLI, 2ª edizione, di pag. XVI-351 con 230 figure 4 —

Calci e Cementi (Impiego delle), per l'Ing. L. MAZZOCCHI di pag. XII-212 con 49 incisioni . . . . . 2 —

Calcolazioni mercantili e bancarie — *vedi* Conti e Calcoli fatti — Interesse e sconto — Prontuario del ragioniere — Monete ingl.

Calcolo infinitesimale, del Prof. E. PASCAL:

Parte I. *Calcolo differenziale,* 2ª edizione riveduta di pag. XII-311 con 10 incisioni . . . . . 3 —

„ II. *Calcolo integrale,* 2ª edizione completamente rifatta di pag. VIII-329 . . . . . 3 —

„ III. *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite,* di pag. XII-300 . . . . . 3 —

— **Esercizi di calcolo infinitesimale** (Calcolo differenziale e integrale), del Prof. E. PASCAL, di pag. XX-372 . . . 3 —

Calderaio pratico e costruttore di caldaie a vapore, e di altri apparecchi industriali, di G. BELLUOMINI, di pag. XII-248, con 220 incisioni. . . . . 3 —

Calligrafia (Manuale di). Cenno storico, cifre numeriche, materiale adoperato per la scrittura e metodo d'insegnamento, con 55 tavole di modelli dei principali caratteri conformi ai programmi, del Prof. R. PERCOSSI, con 38 facsimili di scritture . . . . . 3 —

Calore (Il), del Dott. E. JONES, trad. di U. FORNARI, di pag. VIII-296, con 98 incisioni . . . . . 3 —

Campicello (Il) **scolastico.** Impianto e coltivazione. Manuale di agricoltura pratica per i Maestri, dei Dottori E. AZIMONTI e C. CAMPI, di pag. XI-175, con 126 incisioni 1 50

Cancelliere — *vedi* Conciliatore.

Candele — *vedi* Industria stearica.

Cane (Il) Razze mondiali, allevamento, ammaestramento, malattie con una appendice: I cani della spedizione polare di S. A. R. il Duca degli Abruzzi, di A. VECCHIO, 2ª edizione rifatta, di pag. XVI-442, con 152 inc. e 63 tavole delle quali 12 a colori pa disegni originali dell'autore . 7 50

Canottaggio (Manuale di), del Cap. G. CROPPI, di pagine XXIV-456, con 387 incis. e 91 tav. cromolit. 7 50

Cantante (Man. del). di L. MASTRIGLI, di pag. XII-132 . 2 —

Cantiniere (Il). Manuale di vinificazione per uso dei cantinieri, di A. STRUCCHI, 3ª edizione riveduta ed aumentata, con 52 incisioni unite al testo, una tabella completa per la riduzione del peso degli spiriti, ed un'Appendice sulla produzione e commercio del vino in Italia, di pag. XVI-256 2 —

Canto (Il) **nel suo meccanismo,** di P. GUETTA, di p. VIII-258, con 24 incisioni 2 50

Carborundum — *vedi* Imitazioni.

Carburo di calcio — *vedi* Acetilene.

L. c.

Carta (Industria della), dell'Ing. L. SARTORI, di pag. VII-326, con 106 incisioni e 1 tavola 5 50

Carte fotografiche, Preparazione e trattamento, di L. SASSI, di pag. XII-353 . . . . . 3 50

Carte geografiche — *vedi* Atlante.

Cartografia (Manuale teorico-pratico della), con un sunto della storia della Cartografia, del Prof. E. GELCICH, di pag. VI-257, con 37 illustrazioni . . . . . 2 —

Casa (La) **dell'avvenire,** dell' Ing. PEDRINI. Vade mecum dei costruttori, dei proprietari di case e degli inquilini. Raccolta ordinata di principî d' ingegneria sanitaria, domestica ed urbana, per la costruzione di case igieniche, civili, operaie e rustiche e per la loro manutenzione, di pag. XV-468, con 213 incisioni 4 50

Case coloniche — *vedi* Economia fabbricati rurali.

Case operaie e abitazioni popolari, di E. MAGRINI, (In lav.).

Caseificio, di L. MANETTI, 4ª ediz. nuovamente ampliata dal Dr. G. SARTORI di pag. XII-280, con 49 incisioni . 2 —

Catasto (Il nuovo) **italiano,** di E. BRUNI, di pag. VII-346 . 3 —

Cavallo (Il), del Colonnello C. VOLPINI, 3ª edizione rived. ed ampliata di pag. VI-233 con 48 tavole 5 50

Cavi telegrafici sottomarini. Costruzione, immersione, riparazione, dell'Ing. E. JONA, di pag. XVI-388, 188 fig. e 1 carta delle comunicazioni telegrafiche sottomarine . . 5 50

Cedri — *vedi* Agrumi.

Celerimensura e tavole logaritmiche a quattro decimali dell'Ing. F. BORLETTI, di pag. VI-148, con 29 incisioni . . 3 50

Celerimensura (Manuale e tavole di), dell'Ing. G. ORLANDI, di pag. 1200. con quadro generale d'interpolazioni . . . 18 —

Celluloide — *vedi* Imitazioni.

Cementazione — *vedi* Tempera.

Cementi armati — *vedi* Calcestruzzo — Calci e cementi.

Ceralacca — *vedi* Vernici e lacche.

Ceramiche — *vedi* Maioliche e porcellane — Fotosmaltografia.

Chimica, del Prof. H. E. ROSCOE, 5ª edizione rifatta da E. RICCI, di pag. XII-228, con 47 incisioni. 1 50

Chimica agraria, di A. ADUCCO, 2ª ediz. di pag. XII-512 3 50

Chimica analitica (Elementi scientifici di), di W. OSTWALD, trad. del Dott. BOLIS, di pag. XVI-234 . . . . . 2 50

Chimica applicata all'igiene. Guida pratica ad uso degli Ufficiali sanit.. Medici - Farmacisti - Commercianti - Laboratori d'igiene, di merciologia, ecc., di P. E. ALESSANDRI, di pag. XX-515, con 49 incisioni e 2 tav. 5 50

Chimica clinica, del Prof. R. SUPINO, di pagine XII-202. . 2 —

Chimica legale, (Tossicologia), di N. VALENTINI, di pagine XII-243 . . . . . 2 50

Chimico (Manuale del) **e dell'industriale.** Raccolta di ta-

L. c.

belle, di dati fisici e chimici e di processi d'analisi tecnica, ad uso dei chimici analitici e tecnici, dei direttori di fabbriche, dei fabbricanti di prodotti chimici, degli studenti di chimica, ecc., ecc., del Dottor L. GABBA, 3ª edizione ampliata, riveduta ed arricchita delle tavole analitiche di H. WILL, di pag. XIX-457, con 12 tavole 5 50

Chiromanzia e tatuaggio, note di varietà, ricerche storiche e scientifiche, coll'appendice di un'inchiesta con risposte di Ferrero, Lombroso, Mantegazza, Morselli ed altri di G. L. CERCHIARI, di pag. XX-323, con XXIX tav. e 82 inc. 4 50

Chirurgia operativa (Man. di), dei Dottori R. STECCHI e A. GARDINI, di pag. VIII-322, con 118 incisioni . . . . . 3 —

Chitarra (Manuale pratico per lo studio della), di A. PISANI, di pag. XVI-116, con 36 figure e 25 esempi di musica. . . 2 —

Ciclista, di I. GHERSI, 2ª ediz. complet. rifatta del "Manuale del Ciclista" di A. GALANTE, di pag. 244, 147 inc. . . . 2 50

Cimiteri — *vedi* Ingegneria legale.

Civiltà araba (Islamismo) del prof. ITALO PIZZI (in lav.).

Classificazione delle scienze, di C. TRIVERO, p. XVI-292 . 3 —

Climatologia, di L. DE MARCHI, pag. X-204 e 6 carte . . . 1 50

Cloruro di sodio — *vedi* Sale.

Codice cavalleresco italiano (Tecnica del duello), di J. GELLI, 9ª ediz. rifatta, di pag. XVI-283 . . . . . 2 50

Codice del bollo (Il). Nuovo testo unico commentato colle risoluzioni amministrative e le massime di giurisprudenza, ecc., di E. CORSI, di pag. C-564. . . . . 4 50

Codice civile del Regno d'Italia, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2ª ediz. di pag. 232 . . . 1 50

Codice di commercio, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2ª ediz. di pag. IV-158. . . . . 1 50

Codice doganale italiano con commento e note, dell'Avv. E. BRUNI, di pag. XX-1078 con 4 inc. 6 50

Codice di marina mercantile, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2ª ediz. di pag. IV-290. . . . . 1 50

Codice metrico internazionale — *vedi* Metrologia.

Codice penale e di procedura penale, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2ª ediz. di pag. IV-230. . . . . 1 50

Codice penale per l'esercito e penale militare marittimo, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2ª ediz. di pag. 179 . . 1 50

Codice del perito misuratore. Raccolta di norme e dati pratici per la misurazione e la valutazione d'ogni lavoro

L. c.

edile, prontuario per preventivi, liquidazioni, collaudi, perizie, arbitramenti, degli Ingegn. L. MAZZOCCHI e E. MARZORATI, di pag. XIII-498 con 116 illustrazioni 5 50

Codice di procedura civile, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2ª ediz. di pag. 167 . . . . . 1 50

Codice sanitario — *vedi* Legislazione sanitaria.

Codice del teatro (Il). Vade-mecum legale per artisti lirici e drammatici, impresari, capicomici, direttori d'orchestra, direzioni teatrali, agenti teatrali, gli avvocati e per il pubblico, dell'Avv. TABANELLI, di pag. XVI-828 . . . . . 8 —

Codici e leggi usuali d'Italia, riscontrati sul testo ufficiale coordinati e annotati dal Prof. Avv. L. FRANCHI, raccolti in quattro grossi volumi legati in pelle flessibile . . . . . 36 —

Vol. I. Codice civile - di procedura civile - di commercio - penale - procedura penale - della marina mercantile - penale per l'esercito - penale militare marittimo (*otto codici*) 2ª edizione, di pag. VIII-1261 . . . . . 8 50

Vol. II. Parte I. Leggi usuali d'Italia. Raccolta coordinata di tutte le leggi speciali più importanti e di più ricorrente ad estesa applicazione in Italia; con annessi decreti e regolamenti e disposte secondo l'ordine alfabetico delle mater Dalla voce " Abbordi in mare „ alla voce " Istruz. pubblica (Legge Casati), „ di pag. VIII-1364 a 2 colonne . . . . . 9 —

Vol. II. Parte II. Dalla voce: *Laghi pubblici* alla voce: *Volture catastali* con appen., pag. VIII-1369-2982 a 2 col. 12 —

Vol. III. Leggi e convenzioni sui diritti d'autore, raccolta generale delle leggi italiane e straniere e di tutti i trattati e le convenzioni esistenti fra l'Italia ed altri Stati a cura della Società italiana degli autori, 2ª edizione interamente rifatta dal prof. L. FRANCHI, di pagine VII-617, legato in tutta pelle flessibile 6 50

Cognac (Fabbricazione del) **e dello spirito di vino e distillazione delle fecce e delle vinacce,** di DAL PIAZ, con note del Cav. G. PRATO, di pag. X-168, con 37 incisioni 2 —

Coleotteri italiani, del Dott. A. GRIFFINI, (Entomologia I) di pag. XVI-334, con 215 inc. . . . . 8 —

Collezioni — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte — Amatore di maioliche — Armi antiche — Autografi — Dizionario filatelico.

Colombi domestici e colombicoltura, del Prof. P. BONIZZI, 2ª edizione rifatta a cura della Società Colombifila fiorentina di pag. X-211, con 26 figure . . . . . 2 —

Colorazione dei metalli — *vedi* Metallocromia.

Colori (La scienza dei) **e la pittura** di L. GUAITA, p. 248 . 2 —

Colori e vernici, di G. GORINI, 3ª ediz. totalmente rifatta, per cura di G. APPIANI, di pag. X-282, con 13 incisioni 2 —

Combustibili — *vedi* Imitazioni.

L. c.

Commedia — *vedi* Letteratura drammatica.

Commerciante (Manuale del) ad uso della gente di commercio e degli Istituti d'Istruzione commerciale, corredato di oltre 200 moduli, quadri, esempi, tavole dimostrative e prontuari di C. DOMPE, di pag. VI-629 . . . . . 5 50

Commercio, (Storia del) di R. LARICE, di pag. XVI-386 . 3 —

Commercio — *vedi* Codice — Corrispondenza commerciale — Computisteria — Geografia commerciale — Industria zucchero — Mandato — Merciologia — Produzione e commercio del vino — Ragioneria — Scritture d'affari — Trasporti e Tariffe — Conti fatti — Monete.

Compensazione degli errori con speciale applicazione ai rilievi geodetici, di F. CROTTI, pag. IV-360 . . . . . 2 —

Complementi di geometria elementare, del Prof. di C. ALASIA, di pag. XV-244, con 117 figure 1 50

Complemento di matematica — (*vedi* Matematica).

Compositore-tipografo Manuale dell'allievo), di S. LANDI — *vedi* Tipografia, vol. II.

Computisteria, del Prof. V. GITTI:

Vol. I. Compustiteria commerciale, 5ª ediz., (9 e 10° migliaio) di pag. IV-184 . . . . . 1 50

Vol. II. Computist. finanziaria, 3ª ediz., pag. VIII-156 . . 1 50

Computisteria agraria, del Prof. L. PETRI, seconda edizione rifatta, di pag. VIII-210 . . . . . 1 50

Comuni del Regno d'Italia — *vedi* Dizionario.

Concia delle pelli ed arti affini, di G. GORINI, 3ª edizione interamente rifatta dal Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI, di pag. IX-210 . . . . . 2 —

Conciliatore (Manuale del), dell'Avv. G. PATTACCINI. Guida teorico-pratica con formulario completo pel Conciliatore, Cancelliere, Usciere e Patrocinatore di cause. 4ª edizione ampliata dall'autore e messa in armonia con l'ultima legge 28 luglio 1895, di pag. XII-461 . . . . . 3 —

Concimi, del Prof. A. FUNARO, 2ª edizione rinnovata e accresciuta, di pag. XII-266 . . . . . 2 —

Concimi fosfatici — *vedi* Fosfati — Chimica agraria.

Confezione d'abiti — *vedi* Abiti.

Coniglicoltura pratica, di G. LICCIARDELLI, 2ª ediz., di pag. VIII-248, con 53 incisioni e 12 tavole in tricromia . 2 50

Conservazione delle sostanze alimentari, di G. GORINI, 3ª edizione intieramente rifatta dai Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI, di pag. VIII-256 . . . . . 2 —

Consigli pratici — *vedi* Ricettario domestico — Industriale — Soccorsi d'urgenza.

Contabilità comunale, secondo le nuove disposizioni legislative e regolamentari (Testo unico 10 febbraio 1889 e R. Decr. 6 luglio 1890), del Prof. A. DE BRUN, pag. VIII-186 . 1 50

Contabilità domestica, Nozioni amministrativo-contabili ad uso delle famiglie e delle scuole femminili, del Rag. O. BERGAMASCHI, di pag. XVI-186 . . . . . 1 50

L. c.

Contabilità generale dello Stato, dell'Avv. E. BRUNI, 2ª edizione rifatta, pag. XVI-420 . . . . . 8 —

Contabilità delle istituzioni di p. beneficenza — *vedi* Beneficenza.

Conti e calcoli fatti, dell'Ing. I. GHERSI, 93 tabelle e istruzioni pratiche sul modo di usarle. (Misure, Pesi, Monete, Termometro, Gas e Vapori, Areometri, Alcoolometri, Soluzioni zuccherine, Pesi specifici, Legnami, Carboni, Metalli, Divisioni del tempo, Paga giornaliera, Interessi e Annualità, Rendita, Potenze e Radici, Poligoni e Poliedri regolari, Sfera, Circolo, Divisione della circonf., Pendenza, pag. 204. . 2 50

Contratti agrari — *vedi* Mezzeria.

Conversazione italiana e tedesca (Manuale di), ossia guida completa per chiunque voglia esprimersi con proprietà e speditezza in ambe le lingue, e per servire di *vade mecum* ai viaggiatori, di A. FIORI, 8ª edizione rifatta da G. CATTANEO, pag. XIV-400 . . . . . 3 50

Conversazione italiana-francese — V. *Fraseologia*

Cooperative rurali, di credito, di lavoro, di produzione, di assicurazione, di mutuo soccorso, di consumo, di acquisto di materie prime, di vendita di prodotti agrari. Scopo, costituzione, norme giuridiche, tecniche, amministrative, computistiche, di V. NICCOLI, pag. VIII-362 . . . . . 3 50

Cooperazione nella sociologia e nella legislazione, di F. VIRGILII, pag. XII-228 . . . . . 1 50

Correnti elettriche alternate semplici, bifasi e trifasi. Manuale pratico per lo studio, costruzione ed esercizio degli impianti elettrici, dell'Ing. A. MARRO, di pag. XIV-615-LXIV, con 218 incisioni e 46 tabelle 6 50

Corrispondenza commerciale poliglotta, di G. FRISONI, compilata su di un piano speciale nelle lingue ital., francese, tedesca, inglese e spagnuola, di cui ciascuna forma in sè stessa l'originale e le altre ne sono la traduz. o la chiave:

I. — **PARTE ITALIANA: Manuale di Corrispondenza Commerciale italiana** corredato di facsimili dei vari documenti di pratica giornaliera, seguito da un GLOSSARIO delle principali voci ed espressioni attinenti al Commercio, agli Affari marittimi, alle Operazioni bancarie ed alla Borsa, ad uso delle Scuole, dei Banchieri, Negozianti ed Industriali di qualunque nazione, che desiderano abilitarsi alla moderna terminologia e nella corretta fraseologia mercantile Italiana, di pag. XX-444 . . . . . 4 —

II. — **PARTE SPAGNUOLA: Manual de Correspondencia Comercial Espanola,** accompañado de facsimiles de los varios documentos de uso cotidiano, seguido de un DICCIONARIO Español-Italiano que contiene las principales voces empleados en los Negocios mercantiles y maritimos y los terminos más importantes del Banco, de la Contabilidad y de la Bolsa, compuesto para uso de las Escuelas, de los Banqueros, Negociante é industriales de cualquiera nación que desean habilitarse en la moderna terminología y en la corriente fraseología mercantil española, p. XX-440. 4 —

L. c

III. — **PARTE FRANCESE: Manuel de Correspondance commerciale française**, accompagné des fac-similes des differents documents d'usage quotidien, suivi d'un Dictionnaire commercial français-italien contenent les principales expressions du langage mercantil et maritimes et les termes les plus importants de Banque de comptabilité, de Bourse et De Chemins de Fer, à l'usage des Ecoles, des Banquiers, des Négociants et Industriels qui derivent se perfectionner dans la terminologie moderne et dans la phraséologie mercantile française de nos jours, di pag. VXI-446 4 —

IV.— **PARTE INGLESE: A Manual of english Commercial correspondence**, including specimens and forms of different documents of daily use, followed by an English and Italian Mercantile Dictionary containing the principal expressions employed in trade, commerce and shipping concerns, and the most important terms of Bank, Book-Keeiping, Stock-Exchange and Railway for the use of students, bankers, merchants and manufacturers who wish to perfect themselves in the terminology and phraseology as actually in current use with english business men, p. XVI-448 4 —

V. — **PARTE TEDESCA** (in lavoro).

Corse (Le), con un Dizionario delle voci più in uso, di G. FRANCESCHI, di pag. XII-305 . . . . . 2 50

— *vedi anche* Dizion. dei termini delle — Cavallo — Proverbi.

Cosmografia. *Uno sguardo all'Universo*, di B. M. LA LETA, pag. XII-197, con 11 incisioni e 8 tavole 1 50

Costituzione degli Stati — *vedi* Diritti e doveri — Ordinam.

Costruttore navale (Manuale del), di G. ROSSI, pag. XVI-517, con 231 fig. intercalate nel testo e 65 tabelle. . . . 6 —

Costruzioni — *vedi* Fabbricati rurali.

Cotoni — *vedi* Prodotti agricoli.

Cremore di tartaro — *vedi* Distillazione.

Cristallo — *vedi* Specchi.

Cristallografia geometrica, fisica e chimica, applicata ai minerali, di E. SANSONI, p. XVI-367, 284 inc. nel testo . 3 —

Cristo — *vedi* Imitazione di Cristo.

Cristoforo Colombo, di V. BELLIO, pag. IV-136 e 10 incis. . 1 50

Crittogame — *vedi* Funghi — Malattie crittogamiche — Tartufi.

Crittografia (La) diplomatica, militare e commerciale, ossia l'arte di cifrare e decifrare le corrispondenze segrete. Saggio del conte L. GIOPPI, pag. 177 . . . . . 3 50

Cronologia delle Scoperte e delle esplorazioni geografiche dall'anno 1492 a tutto il secolo XX del Prof. L. HUGUES, di pag. VIII-487 . . . . . 4 50

Cronologia — *vedi* Storia e cronologia.

Cubatura dei legnami (Prontuario per la), di G. BELLUOMINI, 4ª ediz. corretta ed accresciuta, pag. 220. . . . . 2 50

Cuoio — *vedi* Concia delle pelli — Imitazioni.

Curatore dei fallimenti (Manuale teorico-pratico del) Commissario giudiziale nel concordato preventivo e procedura dei piccoli fallimenti dell'Avv. MOLINA (In lavoro).

Curiosità — *vedi* Amatore di oggetti d'arte — Maioliche e porcellane — Armi antiche — Autografi.

L. c.

Curve circolari e raccordi. Manuale pratico per il tracciamento delle curve in qualunque sistema e in qualsiasi caso particolare nelle ferrovie, strade e canali e per il computo generali dei raccordi circolari con speciali applicazioni al tracciamento dei raddoppi del Binario delle derivazioni e degli scambi ferroviari (In sostituzione del manuale del KRÖNHKE), di C. FERRARIO, pag. XI-264, con 94 incis. . . 3 50

Dantologia, del Dott. G. A. SCARTAZZINI, 2ª edizione. Vita e Opere di Dante Alighieri, pag. VI-408 . . . . . 3 —

Danze — *vedi* Ballo.

Datteri — *vedi* Prodotti agricoli.

Debito (Il) **pubblico italiano.** Regole e modi per le operazioni sui titoli che lo rappresentano, di F. AZZONI, pag. VIII-376 3 —

Decorazione dei metalli — *vedi* Metallocromia.

Decorazioni del vetro — *vedi* Specchi — Fotosmaltologia.

Decorazioni e industrie artistiche, dell'Architetto A. MELANI, 2 volumi, pag XX-460, con 118 incisioni . . . . . 6 —

Denti — *vedi* Igiene della bocca.

Determinanti e applicazioni, di E. PASCAL, pag. VII-330 . 3 —

Diagnostica — *vedi* Semeiotica.

Dialetti italici. Grammatica, iscrizione, versione e lessico, di O. NAZARI, pagine XVI-364 . . . . . 3 —

Dialetti letterari greci (epico, neo-ionico, dorico, eolico), del Pof. G. BONINO, pag. XXXII-214 . . . . . 1 50

Didattica per gli alunni delle Scuole normali e pei maestri elementari, del Pof. G. SOLI, pag. VIII-314 . . . . . 1 50

Digesto (Il), del Prof. G. FERRINI, pag. IV-134 . . . . . 1 50

Dilettanti di pittura — *vedi* Pittura ad olio.

Dinamica elementare, di G. CATTANEO, p. VIII-146, 25 fig. 1 50

Dinamite — *vedi* Esplodenti.

Diritti e doveri dei cittadini, secondo le Istituzioni dello Stato, per uso delle pubbliche Scuole, del Prof. D. MAFFIOLI, 10ª edizione, (dal 26 al 30° migliaio) con una appendice sul Codice penale, pag. XVI-229 . . . . . 1 50

Diritti d'Autore — *vedi* Leggi sui.

Diritto amministrativo, giusta i programmi governativi ad uso d. Istituti tecnici, di G. LORIS, 5ª ed. pag. XX-474 3 —

Diritto civile (Compendio di), del Prof. G. LORIS, giusta i programmi governativi ad uso degli Istituti tecnici, 2ª ediz. riveduta, corretta ed ampliata, pag. XVI-385. . . . . 3 —

Diritto civile italiano, di C. ALBICINI, p. VIII-128 . . . 1 50

Diritto commerciale italiano, del Prof. E. VIDARI, 2ª edizione diligentemente riveduta, pag. X-448 . . . . . 3 —

Diritto comunale e provinciale — *vedi* Contabilità comunale — Diritto amministrativo — Legge comunale.

Diritto costituzionale, dell'Avv. Prof. F. P. CONTUZZI, 2ª edizione, pag. XVI-370 . . . . . 3 —

Diritto ecclesiastico, vigente in Italia. 2ª ediz. riveduta ed ampliata di G. OLMO, pag. XVI-483 . . . . . 3 —

L. c.

Diritto internazionale privato, dell'Avv. Prof. F. P. CONTUZZI, pagine XVI-322 . . . . . 3 —

Diritto internazionale pubblico, dell'Avv. Prof. F. P. CONTUZZI, pagine XII-320 . . . . . 3 —

Diritto penale, dell'Avv. A. STOPPATO, 2ª ediz., (in lavoro)

Diritto penale romano, di C. FERRINI, pag. VIII-360. . . 3 —

Diritto romano, di C. FERRINI, 2ª ediz. rif., pag. XVI-178 . 1 50

Disegnatore meccanico e nozioni tecniche generali di Aritmetica, Geometria, Algebra, Prospettiva, Resistenza dei materiali, Apparecchi idraulici, Macchine semplici ed a vapore, Prepulsori, ecc. per V. GOFFI, 3ª ed. riv., corretta e grandemente ampliata, pag. XIV-552, con 477 figure. . . 6 50

Disegno. I principii del Disegno, del Prof. C. BOITO, 4ª edizione, pag. IV-206, con 61 silografie. . . . . 2 —

Disegno (Grammatica del). Metodo pratico per imparare il disegno, di E. RONCHETTI, di pag. VI-190, con 34 figure, 62 schizzi intercalati nel testo e un atlante a parte con 45 lavagnette, 27 foglietti e 34 tavole. (Indivisibili) . . 7 50

Disegno assonometrico, del Prof. P. PAOLONI, pag. IV-122, con 21 tavole e 23 figure nel testo . . . . . 2 —

Disegno geometrico, del Prof. A. ANTILLI, 2ª ed., pag. VIII-88, con 6 figure nel testo e 27 tavole litografiche . . . . 2 —

Disegno, Teoria e Costruzione delle Navi, ad uso dei Progettisti e Costruttori di Navi - Capi tecnici, Assistenti e Disegnatori navali - Capi operai carpentieri - Alunni d'Istituti Nautici, di E. GIORLI, pag. VIII-238, con 310 incisioni . . 2 50

Disegno industriale, di E. GIORLI. Corso regolare di disegno geometrico e delle proiezioni. Degli sviluppi delle superfici dei solidi. Della costruzione dei principali organi delle macchine. Macchine utensili. 3ª ediz., pag. VIII-192, con 300 problemi risolti e 348 figure 2 50

Disegno di proiezioni ortogonali, del Prof. D. LANDI, di pagine VIII-152, con 192 incisioni . . . . . 2 —

Disegno topografico, del Capitano G. BERTELLI, 2ª ediz., pagine. VI-137, con 12 tavole e 10 incisioni . . . . . 2 —

Disinfezione (La pratica della) pubblica e privata per i Dottori P. E. ALESSANDRI e L. PIZZINI, 2ª edizione, pag. VIII-258, con 29 incisioni 2 50

Distillazione del legno (Lavorazione dei prodotti della). Acetone, Alcool metilico, Aldeide formica, Cloroformio, Acido acetico, Acetato di piombo, Acetato di sodio. *Industrie elettrochimiche.* Ossidi di piombo, Minio, Biacca, Soda caustica, Clorati, Cromati, dell' Ing. F. VILLANI, di pagine XIV-312 . . . . . 3 50

Distillazione delle Vinacce, e delle frutta fermentate. Fabbricazione razionale del Cognac. Estrazione del Cremore di Tartaro ed utilizzazione di tutti i resi-

L. c.

dui della distillazione, di M. DA PONTE, 2ª edizione rifatta, contenenti le leggi italiane sugli spiriti e la legge Austro-Ungarica, pag. XII-375, con 68 incisioni 3 50

Ditteri italiani, di PAOLO LIOY (*Entomologia III*), pag. VII-356, con 227 incisioni . . . . . 3 —

Dizionario alpino italiano. Parte 1ª: *Vette e valichi italiani*, dell'Ing. E. BIGNAMI-SORMANI. — Parte 2ª: *Valli lombarde e limitrofe alla Lombardia*, dell'Ing. C. SCOLARI, pag. XXII-310. . . . . 3 50

Dizionario di abbreviature latine ed italiane usate nelle carte e codici specialmente del Medio Evo, riprodotte con oltre 13000 segni incisi, aggiuntovi un prontuario di *Sigle Epigrafiche.* I monogrammi, la numerizzazione romana ed arabica e i segni indicanti monete, pesi, misure, ecc., per cura di ADRIANO CAPPELLI, Archivista-Paleografo presso il R. Archivio di Stato in Milano, pagine LXII-433, con elegante legatura in cromo 7 50

Dizionario bibliografico, di C. ARLIA, pag. 100 . . . . 1 50

Dizionario Biografico Universale, del Professor Dottor G. GAROLLO. (In lavoro).

Dizionario dei comuni del Regno d'Italia, secondo il Censimento del 10 febbraio 1901, compilato da B. SANTI, di pag. XLVI-175 . . . . . 3 —

Dizionario Eritreo (Piccolo) **Italiano-Arabo-Amarico,** raccolta dei vocaboli più usuali nelle principali lingue parlate nella Colonia Eritrea, di A. ALLORI, pag. XXXIII-203 . . 2 50

Dizionario filatelico, per il raccoglitore di francobolli con introduzione storica e bibliografica, di J. GELLI, 2ª ediz., con Appendice 1898-99, pag. LXIII-464 . . . . . 4 50

Dizionario fotografico pei dilettanti e professionisti, con oltre 1500 voci in 4 lingue, 500 sinonimi e 600 formule di L. GIOPPI, pag. VIII-600, 95 incisioni e 10 tavole 7 50

Dizionario geografico universale, del Prof. Dott. G. GAROLLO. 4ª edizione del tutto rifatta e molto ampliata, di pagine XII-1451 . . . . . 10 —

Dizionario gotico — *vedi* Lingua gotica.

Dizionario italiano-olandese e olandese-italiano, di A. NUYENS, in-16, di pag. XI-948 . . . . . 8 —

Dizionario milanese-italiano e repertorio italiano-milanese, di CLETTO ARRIGHI, pag. 912, a 2 colonne, 2ª ediz. 8 50

Dizionario Numismatico — *vedi* Vocabolarietto numismatico.

Dizionario rumeno — *vedi* Grammatica rumena.

Dizionario stenografico. Sigle e abbreviature del sistema Gabelsberger-Noe, di A. SCHIAVENATO, pag. XVI-156 . . 1 50

L. c.

Dizionario tascabile (Nuovo) **italiano-tedesco e tedesco-italiano,** compilato sui migliori vocabolari moderni e provvisto d'un'accurata accentuazione per la pronuncia dell'italiano, di A. FIORI, 3ª edizione, pag. 798, completamente rifatta dal Prof. G. CATTANEO 3 50

Dizionario tecnico in quattro lingue dell'Ing. E. WEBBER, 4 volumi:

Vol. I. Italiano-Tedesco-Francese-Inglese, 2ª ediz. completamente riveduta e aumentata di circa 2000 termini tecnici, pag. XII-553 . . . . . 6 —

Vol. II. Deutsch-Italienisch-Französisch-Englisch, (esaurito, è in lavoro la 2ª edizione).

Vol. III. Français-Italien-Allemand-Anglais, pag. 509 . . 4 —

Vol. IV. Englisch-Italian-German-French, pag. 659. . . 6 —

Dizionario tecnico-navale e commerciale marittimo inglese-italiano. — *Vedi* Avarie e sinistri marittimi.

Dizionario (Piccolo) **dei termini delle corse,** di G. VOLPINI, di pagine 47. (Esaurito).

Dizionario turco — *vedi* Grammatica turca.

Dizionario universale delle lingue italiana, tedesca inglese e francese. disposte in unico alfabeto, 1 volume di pag. 1200 a 2 colonne . . . . . 8 —

Dizionario Volapük — *vedi* Volapük.

Dogane — *vedi* Codice doganale — Trasporti e tariffe.

Doratura — *vedi* Galvanizzaz. — Galvanostegia — Metallocromia.

Dottrina popolare, in 4 lingue, (Italiana, Francese, Inglese e Tedesca). Motti popolari, frasi commerciali e proverbi, raccolti da G. SESSA, 2ª edizione, pag. IV-112 . . . . . 2 —

Doveri del macchinista navale, e condotta della macchina a vapore marina ad uso dei macchinista navali e degli Istituti nautici, di M. LIGNAROLO, pag. XVI-303 . . . . . 2 50

Drammi — *vedi* Letteratura drammatica.

Duellante (Manuale del) in appendice al *Codice cavalleresco,* di J. GELLI, 2ª edizione, pag. VIII-256, con 26 tavole. . . 2 50

Ebanista — *vedi* Falegname — Modellatore mecc. — Operaio.

Educazione dei bambini — *vedi* Ortofrenia — Sordomuti.

Economia matematica (Introduzione alla), dei Prof. F. VIRGILII e C. GARIBALDI, pag. XII-210, con 19 incisioni . . 1 50

Economia politica, del Prof. W. S. JEVONS, traduzione del Prof. L. COSSA, 4ª ediz. riveduta, pag. XVI-179. . . . . 1 50

Edilizia — *vedi* Fabbric. civili — Ingegneria civ. — Ingegn. leg.

Elettricità, del Prof. FLEEMING JENKIN, traduz. del Prof. R. FERRINI, 3ª ediz. rived., pag. XII-237, con 40 incisioni . 1 50

Elettrochimica (Prime nozioni elementari di), del Professor A. COSSA, pagine VIII-104, con 10 incisioni 1 50

L. c.

Elettrotecnica (Manuale di), di GRAWINKEL-STRECKER, traduzione italiana dell'Ing. FLAVIO DESSY, pagine XVI-816, con 346 figure 9 50

Elettrochimiche (Industrie) — *vedi* Distillazione del legno.

Ematologia — *vedi* Malattie del sangue.

Embriologia e morfologia generale, del Prof. G. CATTANEO, pag. X-242, con 71 incisioni 1 50

Enciclopedia del giurista — *vedi* Codici e leggi usuali d'Italia.

Enciclopedia Hoepli (Piccola), in 2 grossi vol. di 3375 pag. di 2 col. per ogni pag., con Appendice (146740 voci) . . . . 20 —

Energia fisica, del Prof. R. FERRINI, pag. VIII-187, con 47 incisioni. 2ª edizione interamente rifatta 1 50

Enimmistica. Guida per comporre e per spiegare Enimmi, Sciarade, Anagrammi, Logogrifi, Rebus, ecc., di D. TOLOSANI (Bajardo), pag. XII-516, con 29 illustr. e molti esempi 6 50

Enologia, precetti ad uso degli enologi italiani, del Professor O. OTTAVI, 4ª edizione interamente rifatta da A. STRUCCHI, con una Appendice sul metodo della Botte unitaria pei calcoli relativi alle botti circolari, dell'Ing. agr. R. BASSI, pag. XVI-304, con 38 incisioni 2 50

Enologia domestica, di R. SERNAGIOTTO, pag. VIII-233 . 2 —

Entomologia di A. GRIFFINI E P. LIOY, 4 volumi (*vedi* Coleottori — Ditteri — Lepidotteri — Imenotteri).

Epigrafia latina. Trattato elementare con esercizi pratici e facsimili, con 65 tav. del Prof. S. RICCI, pag. XXXII-448 . 6 50

— *vedi* Dizionario di abbreviature latine.

Epilessia, Eziològia, Patogenesi, Cura, Dr. P. PINI, p. X-277 2 50

Eritrea (L') dalle sue origini a tutto l'anno 1901. Appunti cronistorici con annessi 1 carta ed 1 schizzo, un'appendice di note geografiche e statistiche e di cenni sul Benadir e sui viaggi d'esploraz. di B. MELLI, di pag. XII-164 2 —

Eritrea — *vedi* Arabo parlato — Dizionario eritreo, — Grammatica galla — Lingue d'Africa — Prodotti agricoli del Tropico — Tigrè italiano.

Errori e pregiudizi volgari, confutati colla scorta della scienza e del raziocinio da G. STRAFFORELLO, 2ª edizione accresciuta, pag. XII-196 . . . . . 1 50

Esame degli infermi — *vedi* Semeiotica.

Esattore comunale (Manuale dell'), ad uso anche dei Ricevitori provinciali, Messi esattoriali, Prefetti, Intendenti di finanza, Agenti imposte, Sindaci e Segretari dei Comuni, Avvocati, Ingegneri, Ragionieri, Notai e Contribuenti, del Rag. R. MAINARDI, 2ª ediz. rived. e ampl., pag. XVI-480 . 5 50

Esercizi geografici e quesiti, sull'Atlante geografico universale di R. Kiepert, di L. HUGUES, 3ª ediz. rifatta di pagine VIII-208 . . . . . 1 50

Esercizi sulla geometria elementare, del Prof. S. PINCHERLE, pag. VIII-130, con 50 incisioni 1 50

L. c.

Esercizi greci, per la 4ª classe ginnasiale in correlazione alle *Nozioni elemen. di lingua greca*, del Prof. V. INAMA: del Prof. A. V. BISCONTI, 2ª ediz. rifatta, di p. XXVI-284 . 3 —

Esercizi latini con regole (Morfologia generale), del Prof. P. E. CERETI, pag. XII-332. . . . . 1 50

Esercizi di stenografia — *vedi* Stenografia.

Esercizi di traduzione a complemento della grammatica francese, del Prof. G. PRAT, pag. VI-188 . . . . . 1 50

Esercizi di traduzione con vocabolario a complemento della Grammatica tedesca, di G. ADLER, 2ª ed., p. VIII-234. 1 50

Esercizi ed applicazione di Trigonometria piana, con 400 esercizi e problemi proposti dal Prof. C. ALASIA, pag. XVI-292, con 30 incisioni 1 50

Esplodenti e modo di fabbricarli, di R. MOLINA, p. XX-300 2 50

Espropriazione — *vedi* Ingegneria legale.

Essenze — *vedi* Profumiere — Liquorista — Ricettario ind.

Estetica, del prof. M. PILO, di pag. XX-260 . . . . . 1 50

Estimo dei terreni. Garanzia dei prestiti ipotecari e della equa ripartizione dei terreni, dell'Ing. P. FILIPPINI, pag. XVI-328, con 3 incisioni. . . . . 3 —

Estimo rurale, del Prof. CAREGA DI MURICCE, pag. VI-164. 2 —

Etica, (Elementi di) del Prof. G. VIDARI, di pag. XVI-334 . 3 —

Etnografia, di B. MALFATTI, 2ª ediz. inter. rifusa, p. VI-200. 1 50

Euclide (L') emendato del P. G. SACCHERI, traduzione e note di G. BOCCARDINI di pag. XXIV-126 con 55 inc. . 1 50

Evoluzione (Storia dell'), del Prof. CARLO FENIZIA, con breve saggio di Bibliografia evoluzionistica, pag. XIV-389 . . 3 —

Fabbricati civili di abitazione, dell'Ing. C. LEVI, 2ª ediz. rifatta, con 207 incis., e i Capitolati d'oneri approvati dalle principali città d'Italia, pag. XVI-412 . . . . . 4 50

Fabbricati rurali (Costruzione ed economia dei). 2ª edizione rifatta dall' " Economia dei fabbricati rurali ", di V. NICCOLI, di pag. XVI-335, con 125 figure 3 50

Fabbro — *v.* Aritmetica dell'operaio — Fonditore — Meccanico — Operaio — Tornitore.

Fabbro-ferraio (Manuale pratico del), di G. BELLUOMINI, opera necessaria ed indispensabile ai fabbri fucinatori, agli aggiustatori meccanici, armajuoli, carrozzieri, carradori, calderai, coltellinai, fumisti, costruttori di strumenti metrici, di serrature, di arnesi rurali, di ferramenti in genere ed a tutti quelli che si dilettano nei lavori in ferro ed in acciaio, di pag. VIII-242, con 224 incisioni . . . 2 50

Falegname ed ebanista. Natura dei legnami, maniera di conservarli, prepararli, colorirli e verniciarli, loro cubatura, di G. BELLUOMINI, 3ª ed. di pag. XII-224, con 104 incisioni 2 —

L. c.

Fallimenti (*Vedi* Curatore di).
Fanciulli — (idioti, imbecilli, tardivi, ecc.) *v.* Ortofremia.
Farfalle — *vedi* Lepidotteri.

Farmacista (Manuale del), del Prof. P. E. ALESSANDRI, 2ª edizione interamente rifatta e aumentata, corredata di tutti i nuovi medicamenti in uso nella terapeutica, loro proprietà, caratteri, alterazioni, falsificazioni, usi, dosi, ecc., pag. XVI-731, con 142 tavole e 82 incisioni 6 50

Farmacoterapia e formulario, del Dott. P. PICCININI, di pag. VIII-882 . . . . . 3 50

Ferrovie — *vedi* Codice doganale — Curve — Ingegneria legale Macchin. e Fuochista — Trasporti e tariffe.
Filatelia — *vedi* Dizionario filatelico.

Filatura. Manuale di filatura, tessitura e lavorazione meccanica delle fibre tessili, di E. GROTHE, traduzione sull'ultima tedesca, pag. VIII-414, con 105 incisioni . . . . . 5 —

Filologia classica, greca e latina, del Prof. V. INAMA, di pag. XII-195 . . . . . 1 50

Filonauta. Quadro generale di navigazione da diporto e consigli ai principianti, con un Vocabolorio tecnico più in uso nel panfiliamento, del Cap. G. OLIVARI, pag. XVI-286 . . 2 50

Filosofia morale, del Prof. L. FRISO, 2ª edizione riveduta ed aumentata, di pag. XVI-350 . . . . . 3 —

Fillossera e le principali malattie crittogamiche della vite con speciale riguardo ai mezzi di difesa, del Dott. V. PEGLION, pag. VIII-302, con 39 incisioni . . . . . 3 —

Filugello — *vedi* Bachi da seta.

Fiori artificiali, Manuale del fiorista, di O. BALLERINI, pag. XVI-278, con 144 incisioni, e 1 tav. a 36 colori . . . 3 50
— *vedi anche* Pomologia artificiale.

Fisica, del Prof. O. MURANI, con 243 incisioni e 3 tavole, 6ª edizione, completamente rifatta del Manuale di Fisica di BALFOUR STEWART pag. XVI-411 . . . . . 2 —

Fisica cristallografica, W. VOIGT, trad. A. SELLA. (In lav.).

Fisiologia, di FOSTER, traduzione del Prof. G. ALBINI, 3ª edizione, pag. XII-158, con 18 incisioni 1 50

Fisiologia comparata — *vedi* Anatomia.

Fisiologia vegetale, del Dott. LUIGI MONTEMARTINI, pag. XVI-280, con 68 incisioni 1 50

Floricoltura (Manuale di), di C. M. Fratelli RODA, 3ª ed. riveduta ed ampliata da G. RODA, pag. VIII-262, con 98 inc. 2 50

Florilegio poetico greco, del Prof. V. INAMA. (In lavoro).

Flotte moderne (Le) 1896-1900, di E. BUCCI DI SANTAFIORA. Complemento del Manuale del Marino, del C. DE AMEZAGA, pagine IV-204 . . . . . 5 —

L. c.

Fognatura cittadina, dell'Ing. D. SPATARO, pag. X-684, con 220 figure e 1 tavola in litografia . . . . . 7 —

Fognatura domestica, dell'Ing. A. CERUTTI, pag. VIII-421, con 200 incisioni . . . . . 4 —

Fonditore in tutti i metalli (Manuale del), di G. BELLUOMINI, 2ª edizione, pag. VIII-150, con 41 incisioni . . . . 2 —

Fonologia italiana, di L. STOPPATO, pag. VIII-102. . . . 1 50

Fonologia latina, del Prof. S. CONSOLI, pag. 208 . . . . 1 50

Foreste — *vedi* Ingegneria legale — Selvicoltura.

Formaggio — *vedi* Caseificio — Latte, burro e cacio.

Formole e tavole per il calcolo delle risvolte ad arco circolare, adattate alla divisione centesimale ad uso degli ingegneri, di F. BORLETTI, di p. XII-69, legato. . . 2 50

Formulario scolastico di matematica elementare (aritmetica, algebra, geometria, trigonometria), di M. A. ROSSOTTI, di pag. XVI-192 . . . . . 1 50

Fosfati, perfosfati e concimi fosfatici. Fabbricazione ed analisi del Prof. A. MINOZZI, di pag. XII-301 con 48 inc. 3 50

Fotocalchi — *vedi* Arti grafiche — Chimica fotografica — Fotografia industriale — Processi fotomeccanici.

Fotocollografia — *vedi* Processi fotomeccanici.

Fotocromatografia (La), del Dott. L. SASSI, pag. XXI-138, con 19 incisioni . . . . . 2 —

Fotografia industriale (La), fotocalchi economici per la riproduzione di disegni, piani, carte, musica, negative fotografiche, ecc., del Dott. LUIGI GIOPPI, pag. VIII-208, con 12 incisioni e 5 tavole fuori testo. 2 50

Fotografia ortocromatica, del Dott. C. BONACINI, pagine XVI-277, con incisioni e 5 tavole 3 50

Fotografia pei dilettanti. (Come dipinge il sole), di G. MUFFONE, 5ª edizione rifatta ed ampliata, pag. XX-388, con 99 incisioni e 11 tavole . . . . . 3 —

Fotogrammetria, Fototopografia praticata in Italia e applizione della fotogrammetria all'idrografia, dell'Ing. P. PAGANINI. pag. XVI-288, con 56 figure e 4 tavole. . . . 3 50

Fotolitografia — *vedi* Arti grafiche — Processi fotomecc.

Fotosmaltografia (La), applicata alla decorazione industriale delle ceramiche e dei vetri, di A. MONTAGNA, pag. VIII-200, con 16 incisioni nel testo . . . . . 2 —

Fototerapia e radioterapia — *vedi* Luce e salute.

Fototipografia — *vedi* Arti grafiche — Processi fotomecc.

Fragole *vedi* Frutta minori.

Francia — *vedi* Storia della Francia.

Francobolli — *vedi* Dizionario filatelico.

Fraseologia francese-italiana, di E. BAROSCHI SORESINI, pag. VIII-262 . . . . . 2 50

Fraseologia italiana-tedesca — *vedi* Conversazione — Dottrina popolare.

Frenastenia — *vedi* Ortofrenia.

L. c.

Frumento (Il), (come si coltiva o si dovrebbe coltivare in Italia) di E. AZIMONTI, 2ª edizione completamente rifatta del Manuale " Frumento e mais „ di G. CANTONI, di pagine XVI-276 . . . . . 2 50

Frutta minori. Fragole, poponi, ribes, uva spina e lamponi, del Prof. A. PUCCI, pag. VIII-198, con 96 incisioni . . 2 50

Frutta fermentate — *vedi* Distillazione

Frutticoltura, del Prof. Dott. D. TAMARO, 3ª edizione, di pag. XVIII-219, con 81 incisioni . . . . . 2 —

Frutti artificiali — *vedi* Pomologia artificiale.

Fulmini e parafulmini, del Dott. Prof. CANESTRINI, pag. VIII-166, con 6 incisioni . . . . . 2 —

Funghi mangerecci e funghi velenosi, del Dott. F. CAVARA, di pag. XVI-192, con 43 tavole e 11 incisioni . . 4 50

Funzioni analitiche (Teoria delle), di G. VIVANTI, pagine VIII-432 (volume doppio) . . . . . 3 —

Funzioni ellittiche, del Prof. E. PASCAL, pag. 240 . 1 50

Fuochista — *vedi* Macchinista e fuochista.

Fuochi artificiali — *vedi* — Esplodenti — Pirotecnia

Gallinacei — *vedi* Animali da cortile — Colombi — Pollicoltura.

Galvanizzazione, pulitura e verniciatura dei metalli e galvanoplastica in generale. Manuale pratico per l'industriale e l'operaio riguardante la nichelatura, ramatura, ottonatura, doratura, argentatura, stagnatura, zincatura, acciaiatura, antimoniatura, cobaltatura, ossidatura, galvanoplastica in rame, argento, oro, ecc., in tutte le varie applicaz. pratiche, di F. WERTH, di p. XVI-324, con 153 inc. 3 50

Galvanoplastica ed altre applicazione dell'elettrolisi. Galvanostegia, Elettrometallurgia, Affinatura dei metalli, Preparazione dell'alluminio, Sbianchimento della carta e delle stoffe, Risanamento delle acque, Concia elettrica delle pelli, ecc., del Prof. R. FERRINI, 3ª edizione, completamente rifatta, pag. XII-417, con 45 incisioni . . . . . 4 —

Galvanostegia, dell' Ing. I. GHERSI. Nichelatura, argentatura, doratura, ramatura, metallizzazione, ecc. pag. XII-324, con 4 incisioni 3 50

Gastronomia (Terminologia gastronomica italiana e francese) di E. BORGORELLO, con 300 Menus. (In lavoro).

Gaz illuminante (Industria del), di V. CALZAVARA, pag. XXXII-672, con 375 incisioni e 216 tabelle 7 50

— *vedi* Incandescenza a gaz.

Gelsicoltura, del Prof. D. TAMARO, pag. XVI-175 e 22 inc. 2 —

Geografia, di G. GROVE, traduzione del Prof. G. GALLETTI, 2ª edizione riveduta, pag. XII-160, con 26 incisioni . . 1 50

L. c

Geografia classica, di H. F. TOZER, traduzione e note del Prof. I. GENTILE, 5ª edizione, pag. IV-168 . . . . . 1 50

Geografia commerciale economica. *Europa, Asia, Oceania, Africa, América,* di P. LANZONI, 2ª edizione, di pag. VII-370 . . . . . 3 —

Geografia fisica, di A. GEIKIE, traduzione di A. STOPPANI, 3ª edizione, pag. IV-132, con 20 incisioni 1 50

Geologia, di A. GEIKIE, traduzione di A. STOPPANI, quarta edizione, riveduta sull'ultima edizione inglese da G. MERCALLI, pag. XII-176, con 47 incisioni 1 50

Geometria analitica dello spazio, del Prof. F. ASCHIERI, pag. VI-196, con 11 incisioni. 1 50

Geometria analitica del piano, del Prof. F. ASCHIERI, di pag. VI-194, con 12 incisioni 1 50

Geometria descrittiva, del Prof. ASCHIERI, pag. VI-222, con 103 incisioni, 2ª edizione rifatta. 1 50

Geometria elementare — *vedi* Esercizi di Geometria pura — Complementi di Geometria — Problemi di Geometria elementare.

Geometria e trigonometria della sfera, del Prof. C. ALASIA, pag. VIII-208, con 34 incisioni 1 50

Geometria metrica e trigonometria, del Prof. S. PINCHERLE, 6ª edizione, pag. IV-158, con 47 incisioni. . . 1 50

— *vedi anche* Esercizi di Trigonometria.

Geometria pratica, dell'Ing. Prof. G. EREDE, 3ª edizione riveduta ed aumentata, pag. XII-258, con 134 incis. . . 2 —

Geometria projettiva del piano e della stella, del Prof. F. ASCHIERI, 2ª edizione, pag. VI-228, con 86 incisioni. . 1 50

Geometria projettiva dello spazio, del Prof. F. ASCHIERI, 2ª edizione rifatta, pag. VI-264, con 16 incisioni . . . 1 50

Geometria pura elementare, del Prof. S. PINCHERLE, 6ª edizione, con l'aggiunta delle figure sferiche, pag. VIII-176, con 121 incisioni 1 50

Ghiaccio — *vedi* Industria frigorifera.

Giardino (Il) **infantile,** di P. CONTI, pag. IV-213, 27 tav. 3 —

Ginnastica (Storia della), di F. VALLETTI, pag. VIII-181 . 1 50

Ginnastica femminile, di F. VALLETTI, pag. VI-112, 67 ill. 2 —

Ginnastica maschile (Manuale di), per cura di J. GELLI, pag. VIII-108, con 216 incisioni . . . . . 2 —

— *vedi anche* Giuochi ginnastici.

Gioielleria, oreficeria, oro, argento e platino, di E. BOSELLI, pag. 336, con 125 incisioni. . . . . 4 —

— *vedi anche* Metalli preziosi — Pietre preziose.

L. c

Giuochi ginnastici per la gioventù delle Scuole e del popolo, di F. GABRIELLI, pag. XX-218, con 24 tavole . . 2 50

Giuoco (Il) **del pallone e gli altri affini.** Giuoco del calcio (Foot-Ball), della palla a corda (Lawn-Tennis), della palla al muro (Pelota), della palla a maglio e dello sfratto, di G. FRANCESCHI, di pag. VIII-214, con 34 incisioni . . 2 50

Giurato, (Manuale per il) del D.r A. SETTI. 2a edizione rifatta, di pag. XIV-246 . . . . . 2 50

urisdizione volontaria (Manuale della) e degli affari da trattarsi in camera di consiglio, del Dott. A. Formentano (In lavoro).

Giustizia amministrativa. Principî fondamentali, Competenze dei Tribunali ordinari, Competenza della IV Sezione del Consiglio di Stato e delle Giunte provinciali amministrative e relativa procedura, di C. VITTA, p. XII-427 . 4 —

Giottologia, del Prof. G. DE GREGORIO, pag. XXXII-318 . 3 —

Gnomonica ossia **l'arte di costruire orologi solari,** lezioni popolari di B. M. LA LETA, pag. VIII-160, con 19 figure. 2 —

Gomma elastica — *vedi* Imitazioni.

Grafologia, di C. LOMBROSO, pag. V-245 e 470 fac-simili. 3 —

Grammatica albanese con le poesie rare di Variboda, del Prof. V. LIBRANDI, pag. XVI-200 . . . . . 3 —

Grammatica Araba — *vedi* Arabo parlato.

Grammatica araldica - *vedi* Araldica — Vocabolario araldico.

Grammatica ed esercizi pratici della lingua danese-norvegiana con un supplemento contenente le principali espressioni tecnico-nautiche ad uso degli ufficiali di marina che frequentano i mari del nord e gli stretti del Baltico, di G. FRISONI, pag. XX-488. . . . . 4 50

Grammatica ed esercizi pratici della lingua ebraica, del Prof. I. LEVI fu ISACCO, pag. 192 . . . . . 1 50

Grammatica francese, del Prof. G. PRAT, seconda edizione riveduta, pag. XII-299 . . . . . 1 50

Grammatica e dizionario della lingua dei Galla (oromonica), del Prof. E. VITERBO:

Vol. I. Galla-Italiano, pag. VIII-152 . . . . . 2 50

Vol. II. Italiano-Galla, pag. LXIV-106 . . . . . 2 50

Grammatica gotica — *vedi* Lingua gotica.

Grammatica greca. (Nozioni elementari di lingua greca), del Prof. INAMA. 2a edizione, pag. XVI-208 . . . . . 1 50

Grammatica della lingua greca moderna, del Prof. R. LOVERA, pag. VI-154 . . . . . 1 50

Grammatica inglese, del Prof. L. PAVIA, pag. XII-260 . 1 50

Grammatica italiana, del Prof. T. CONCARI, 2a edizione riveduta, pag. XVI-230 . . . . . 1 50

Grammatica latina, L. VALMAGGI, 2a ediz., pag. VIII-256 1 50

Grammatica della lingua olandese, M. MORGANA, p. VIII-124 3 —

L. c.

Grammatica ed esercizi pratici della lingua portoghese-brasiliana, del Prof. G. FRISONI, pag. XII-267 . . . . 3 —

Grammatica e vocabolario della lingua rumena, del Prof. R. LOVERA, pag. VIII-200. . . . . 1 50

Grammatica russa, del Prof. VOINOVICH, pag. X-272 . . 3 —

Grammatica sanscrita — *vedi* Sanscrito.

Grammatica della lingua slovena. Esercizi e vocabolario del Prof. BRUNO GUYON, pag. XVI-314 . . . . . 3 —

Grammatica spagnuola, del Prof. PAVIA, di pag. IX-194 1 50

Grammatica della lingua svedese, del Prof. E. PÀROLI, pagine XV-293 . . . . . 3 —

Grammatica tedesca, del Prof. PAVIA, 2ª ed., di p. XVIII-272 1 50

Grammatica Tigré — *vedi* Tigrè italiano.

Grammatica turca osmanli, con paradigmi, crestomazia, e glossario, di L. BONELLI, pag. VIII-200 e 5 tavole . . 3 —

Grandine — *vedi* Assicurazioni.

Granturco — *vedi* Frumento e mais — Industria dei molini.

Gravitazione. Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare, di Sir G. B. AIRY, traduzione di F. PORRO, con 50 incisioni, pag. XXII-176 . . 1 50

Grecia antica — *vedi* Archeologia (Arte greca) — Mitologia greca — Monete greche — Storia antica.

Gruppi continui di trasformazioni (Parte generale della teoria), di E. PASCAL, di pag. XI-378 . . . . . 3 —

Guida numismatica universale, contenente 6278 indirizzi e cenni storico-statistici di collezioni pubbliche e private, di numismatici, di società e riviste numismatiche, di incisioni, di monete e medaglie e di negozianti di monete e libri di numismatica, di F. GNECCHI. Quarta ediz., di pag. XV-612 8 —

Guttaperca — *vedi* Imitazioni.

Humus (L'), **la fertilità e l'igiene dei terreni culturali,** del Prof. A. CASALI, pag. XVI-210 . . . . . 2 —

Idraulica, T. PERDONI, pag. XXVIII-392 con 301 fig. e 3 tav. 6 50

Idrografia — *vedi* Fotogrammetria.

Idroterapia, di G. GIBELLI, pag. IV-238, con 30 incis. . . 2 —

— *vedi anche* Acque minerali e termali del Regno d'Italia.

Igiene della Bocca e dei Denti, nozioni elementari di Odontologia, di L. COULLIAUX, di pag. XVI-330, e 23 inc. 2 50

Igiene del lavoro, di TRAMBUSTI A. e SANARELLI, pagine VIII-262, con 70 incisioni 2 50

Igiene della pelle, di A. BELLINI, pag. XVI-240, 7 incis. . 2 —

Igiene privata e medicina popolare ad uso delle famiglie, di C. BOCK, 2ª edizione italiana curata dal Dott. GIOV. GALLI, pag. XVI-272 . . . . . 2 50

Igiene rurale, di A. CARRAROLI, pagine X-470 . . . . 3 —

Igiene scolastica, di A. REPOSSI, 2ª ediz., pag. IV-246. . 2 —

Igiene veterinaria, del Dott. U. BARPI, pag. VIII-228 . . 2 —

Igiene della vista sotto il rispetto scolastico, del Dott. A. LOMONACO, pag. XII-272. . . . . .

L. c.

Igiene della vita pubblica e privata, G. FARALLI, p. XII-250 2 50

Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica, del Prof. P. CANTONI, pag. XII-142, con 24 incisioni e 7 tabelle . . 1 50

Illuminazione — *vedi* Acetilene — Gaz. illum. — Incandescenza.

Illuminazione elettrica (Impianti di), Manuale pratico dell'Ing. E. PIAZZOLI, 5ª ediz. interamente rifatta, (9-10 migliaio) seguita da un'appendice contenente la legislazione Italiana relativa agli impianti elettrici, di pag. 606, con 264 incisioni, 90 tabelle e 2 tavole 6 50

Imbalsamatore — *vedi* Naturalisia preparatore — Naturalista viaggiatore — Zoologia.

Imenotteri, Neurotteri, Pseudoneurotteri, Ortotteri e Rincoti italiani, del Dott. E. GRIFFINI (Entomologia IV), pag. XVI-687, con 243 incisioni. 4 50

Imitazione di Cristo (Della), Libri quattro di GIO. GERSENIO, volgarizzamento di CESARE GUASTI, con proemio e note di G. M. ZAMPINI, pag. LVI-396 . . . . . 3 50

Imitazioni e succedanei nei grandi e piccoli prodotti industriali. Pietre e materiali da costruzione, Materiali refrattarii, Carborundum, Amianto, Pietre e metalli preziosi, Galvanoplastica. Cuoio, Linoleum, Seta e fibre tessili diverse, Paste da carta, Materie plastiche, Colle e gomme, Gomma elastica e Guttaperca, Avorio, Corno, Ambra, Madreperla, Celluloide, Viscoso, Cere e grassi, Materie concianti, Legno, Agglomerati di carbone, di segatura, di sughero, Polvere pirica, Caffè, Profumi, Vetrerie, ecc., dell'Ing. I. GHERSI, di pag. XVI-591, con 90 incisioni . 6 50

Immunità e resistenza alle malattie, di A. GALLI VALERIO, pag. VIII-218. . . . . 1 50

Impiego ipodermico e la dosatura dei rimedi, Manuale di terapeutica del Dott. G. MALACRIDA, pag. 305 . . . 3 —

Imposte dirette (Riscoss. delle), E. BRUNI, pag. VIII-158. 1 50

Incandescenza a gaz, (Fabbricazione delle reticelle) di L. CASTELLANI, pag. X-140, con 33 incisioni. . . . . 2 —

Inchiostri — *vedi* Ricettario industriale — Vernici ecc.

Incisioni — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità.

Indovinelli — *vedi* Enimmistica.

Industria (L') **frigorifera** di P. ULIVI. Nozioni fondamentali, macchine frigorifere, raffreddamento dell'aria, ghiaccio artificiale e naturale, dati e calcoli numerici, nozioni di fisica e cenni sulla liquefazione dell'aria e dei gaz, di pagine XII-168, con 36 figure e 16 tabelle . . . . . 2 —

Industrie elettrochimiche — *vedi* Distillazione del legno.

Industrie (Piccole). Scuole e musei industriali - Industrie agricole e rurali - Industrie manifatturiere ed artistiche, di I. GHERSI, 2ª ed. completam. rifatta del Manuale delle *Piccole Industrie* del Prof. A. ERRERA, pag. XII-372 . 3 50

Infanzia — *vedi* Terapia delle malattie dell' — Giardino infantile — Nutrizione — Ortofrenia — Sordomuto.

Infezione — *vedi* Disinfezione — Medicatura antisettica.

L. c.

Infortunii sul lavoro — *vedi* Legge sugli.

Infortunii della montagna (Gli). Manuale pratico degli Alpinisti, delle guide e dei portatori, del Dott. O. BERNHARD, traduzione con aggiunte del Dott. R. CURTI, di pag. XVIII-60, con 65 tav. e 175 figure dimostrative . . 3 50

Infortuni sul lavoro, (Mezzi tecnici per prevenirli) di E. MAGRINI, di pag. XXXII-252, con 257 incisioni . . . . 3 —
— *vedi anche* Leggi per gli.

Ingegnere agronomo — *vedi* Agronomia — Prontuario dell'agric.

Ingegnere civile. Manuale dell'ingegnere civile e industriale, del Prof. G. COLOMBO, 20ª edizione modificata e aumentata, (52° al 54° migliaio), con 221 fig., pag. XIV-428 . . 5 50
Il medesimo tradotto in francese da P. MARCILLAC . 5 50

Ingegnere navale. Prontuario di A. CIGNONI, pag. XXXII-292, con 36 figure. Legato in pelle 5 50

Ingegnere rurale (Prontuario dell') — *Vedi* Agricoltore.

Ingegneria legale per tecnici e giuristi (Manuale di), dell'AVV. A. LION. Commento ed illustrazione con la più recente giurisprudenza: Responsabilità - Perizia - Servitù - Piani regolatori e di ampliamento - Legge di sanità - Regolamenti d'igiene ed edilizii - Espropriazione - Miniere - Foreste - Catasto - Privativa industriale - Acque - Strade - Ferrovie - Tramvay - Bonifiche - Telefoni - Appalti - Riparazioni - Cimiteri - Derivazioni di acque pubbliche - Monumenti d'arte e d'antichità, ecc., pag. VIII-552 . . . . . 5 50

Inghilterra — *vedi* Storia d'Inghilerra.

Insegnamento (L') dell'Italiano nelle Scuole Secondarie. Esposizione teorico-pratica con esempi, del Prof. C. TRABALZA, di pag. XVI-254 . . . . . 1 50

Insetti nocivi, del Prof. F. FRANCESCHINI, pag. VIII-264, con 96 incisioni . . . . . 2 —

Insetti utili, del Prof. F. FRANCESCHINI, di pag. XII-160, con 43 incisioni e 1 tavola . . . . . 2 —

Interesse e sconto, del Prof. E. GAGLIARDI, 2ª edizione rifatta e aumentata, pagine VIII-198 . . . . . 2 —

Inumazioni — *vedi* Morte vera.

Ipnotismo — *vedi* Magnetismo — Spiritismo — Telepatia.

Ipoteche (Man. per le), di A. RABBENO, pag. XVI-247 . . . 1 50

Islamismo (L') del Prof. I. PIZZI, di pag. VIII-494. . . . 3 —

Ittiologia italiana, del Dott. A. GRIFFINI, con 244 incis. Descriz. dei pesci di mare e d'acqua dolce, di p. XVIII-469 4 50
— *vedi anche* Piscicoltura — Ostricoltura.

Lacche — *vedi* Vernici ecc.

Latte, burro e cacio. Chimica analitica applicata al caseificio, del Prof. SARTORI, pag. X-162, con 24 incisioni . 2 —

Lavori femminili — *vedi* Abiti per signora — Biancheria — Macchine da cucire — Monogrammi — Trine a fuselli.

Lavori marittimi ed impianti portuali, di F. BASTIANI, di pag. XXIII-424, con 209 figure 6 50

Lavori pubblici — *vedi* Leggi sui lavori pubblici

L. c.

Lavori in terra (Manuale di), dell'Ing. B. LEONI, pag. XI-305, con 38 incisioni . . . . . 3 —

Lavoro (Il) **delle donne e dei fanciulli.** Nuova legge e regolamento 19 giugno 1902 — 28 febbraio 1903. Testo atti parlamentari e commento, per cura dell'Avv. E. NOSEDA di pag. XV-174 . . . . . 1 50

Lawn-Tennis, di V. BADDELEY, prima traduzione italiana con note e aggiunte del trad., pag. XXX-206, con 18 illustr. 2 50

Legge (La nuova) **comunale e provinciale,** annotata da E. MAZZOCCOLO, 4ª edizione, interamente rifatta con l'aggiunta del regolamento e di 2 indici, pag. XII-820 . . . 7 50

Legge sui lavori pubblici e regolamenti, di L. FRANCHI, pag. IV-110-CXLVIII 1 50

Legge lavoro donne e fanciulli — *vedi* lavoro.

Legge sull'ordinamento giudiziario, dell'Avv. L. FRANCHI, pag. IV-92-CXXVI 1 50

Leggende popolari di E. MUSATTI. 3ª ediz. di p. VIII-181 1 50

Leggi e convenzioni sui diritti d'autore — *vedi* Codici e leggi usuali d'Italia, vol. III.

Leggi per gl'infortunii sul lavoro, dell'Avv. A. SALVATORE, pag. 312 . . . . . 3 —

Leggi e convenzioni sulle privative industriali, disegni, modelli di fabbrica, marchi di fabbrica e di commercio, di L. FRANCHI. (In lavoro).

Leggi sulla sanità e sicurezza pubblica, di L. FRANCHI, pag. IV-108-XCII 1 50

Leggi sulle tasse di Registro e Bollo, con appendice, del Prof. L. FRANCHI, pag. IV-124-CII 1 50

Leggi usuali d'Italia — *vedi* Codici e leggi.

Leghe metalliche ed amalgame, alluminio, nichelio, metalli preziosi e imitazione, bronzo, ottone, monete e medaglie, saldature, dell'Ing. I. GHERSI, p. XVI-431, con 15 inc. 4 —

Legislazione delle acque di D. CAVALLERI, di pag. XV-274 2 50

Legislazione Mortuaria — *vedi* Morte.

Legislazione sanitaria italiana, (La nuova) di E. NOSEDA. di pag. VIII-570 . . . . . 5 —

Legislazione rurale, secondo il programma governativo per gli Istituti Tecnici, dell'Avv. E. BRUNI, pag. XI-423 . . 3 —

Legnami — *vedi* Cubatura dei legnami — Falegname.

Legno artificiale — *vedi* Imitazioni.

Legno (Lavorazione dei prodotti di distillazione del) — *vedi* Distillazione.

Lepidotteri italiani, del Dott. A. GRIFFINI (Entomol. II), pag. XIII-248, con 149 incisioni. 1 50

Letteratura albanese (Manuale di), del Prof. A. STRATICÒ, pag. XXIV-280 . . . . . 3 —

Letteratura americana, di G. STRAFFORELLO. pag. 158 1 50

Letteratura araba, del Prof. I. PIZZI di pag. XII-388 . 3 —

— *vedi anche* Islamismo.

L. c.

Letteratura assira, del Dott. B. TELONI di pag. XV-266 e tre tavole fuori testo . . . . . 3 —

Letteratura catalana, del Prof. RESTORI. (In lavoro).

Letteratura danese — *vedi* Letteratura norvegiana

Letteratura drammatica, di C. LEVI, pag. XII-339 . . . 3 —

Letteratura ebraica, di A. REVEL, 2 vol., pag. 364 . . 3 —

Letteratura egiziana, di L. BRIGIUTI. (In lavoro).

Letteratura francese, del Prof. E. MARCILLAC, traduz. di A. PAGANINI, 3ª edizione, pag. VIII-198 . . . . . 1 50

Letteratura greca, di V. INAMA, 14ª ediz. riveduta (dal 56° al 61° migliaio) pag. VIII-286 e una tavola. . . . 1 50

Letteratura indiana, A. DE GUBERNATIS, pag. VIII-159 . 1 50

Letteratura inglese, di E. SOLAZZI, 2ª edizione, di pagine VIII-194 . . . . . 1 50

Letteratura italiana, del Prof. C. FENINI, dalle origini al 1748, 5ª edizione completamente rifatta dal Prof. V. FERRARI, pag. XVI-291 . . . . . 1 50

Letteratura italiana moderna, (1748-1870). Aggiunti 2 quadri sinottici della letteratura contemporanea (1870-1901) del Prof. V. FERRARI, pag. 290 . . . . . 1 50

Letteratura italiana moderna e contemporanea 1748-1901, del Prof. V. FERRARI, pag. VIII-406 . . . . . 3 —

Letteratura latina — *vedi* Letteratura romana

Letteratura norvegiana, di S. CONSOLI, pag. XVI-272. . 1 50

Letteratura persiana, del Prof. I. PIZZI, pag. X-208 . . 1 50

Letteratura provenzale, di A. RESTORI, pag. X-220 . . 1 50

Letteratura romana, del Prof. F. RAMORINO, 6ª edizione corretta, di pag. VIII-349 . . . . . 1 50

Letteratura spagnuola e portoghese, del Prof. L. CAPPELLETTI, 2ª edizione rif. da B. SANVISENTI (In lavoro).

Letteratura tedesca, del Prof. O. LANGE, 3ª edizione rifatta dal Prof. MINUTTI, pag. XVI-188 . . . . . 1 50

Letteratura ungherese, di ZIGANY ARPÀD, pag. XII-295. 1 50

Letterature slave, del Prof. D. CIÀMPOLI, 2 volumi:

I. Bulgari, Serbo-Croati, Yugo-Russi, pag. IV-144. . . 1 50

II. Russi, Polacchi, Boemi, pag. IV-142 . . . . . 1 50

Lexicon Abbreviaturarum quae in lapidibus, codicibus et chartis praesertim Medii-Aevi occurrunt — *vedi* Dizionario di abbreviature.

Limoni *vedi* Agrumi.

Lingua araba — *vedi* Arabo parlato — Dizionario eritreo — Grammatica Galla — Lingue dell'Africa — Tigrè.

Lingua gotica, grammatica, esercizi, testi, vocabolario comparato con ispecial riguardo al tedesco, inglese, latino e greco, del Prof. S. FRIEDMANN, pag. XVI-333 . . . . 3 —

Lingua greca — *vedi* Esercizi — Filologia — Florilegio — Grammatica — Letteratura — Morfologia — Dialetti — Verbi.

L. c.

Lingue dell'Africa, di R. CUST, versione italiana del Prof. A. DE GUBERNATIS, di pag. IV-110 . . . . . 1 50

Lingua latina *vedi* Dizionario di abbreviature latine — Epigrafia — Esercizi — Filologia classica — Fonologia — Grammatica — Letteratura romana — Metrica — Verbi.

Lingue germaniche — *vedi* Grammatica danese-norvegiana inglese, olandese, tedesca, svedese.

Lingua Turca Osmanli — *vedi* Grammatica.

Lingue neo-latine, del Dott. E. GORRA, pag. 147. . . . 1 50

Lingue straniere (Studio delle), di C. MARCEL, ossia l'arte di pensare in una lingua straniera, traduzione del Prof. DAMIANI, di pag. XVI-136 . . . . . 1 50

Linoleum — *vedi* Imitazioni.

Liquidatore di sinistri marittimi — *vedi* Avarie e sinistri marittimi.

Liquorista, di A. ROSSI, con 1270 ricette pratiche. Materiale, Materie prime, Manipolazioni, Tinture, Essenze naturali ed artificiali, Fabbricazione dei liquori per macerazione, digestione, distillazione, con essenze, tinture, ecc., Liquori speciali, Vini aromatizzati, pag. XXXII-560, con 19 incisioni nel testo . . . . . 5 —

Litografia, di C. DOYEN, di pag. VIII-261, con 8 tavole e 40 figure di attrezzi, ecc., occorrenti al litografo . . . 4 —

Liuto — *vedi* Chitarra — Mandolinista — Strum. ad arco.

Logaritmi (Tavole di), con 6 decimali, di O. MÜLLER, 6ª ediz., aumentata delle tavole dei logaritmi d'addizione e sottrazione per cura di M. RAINA, di pagine XXXVI-191. (11, 12, 13° migliaio) 1 50

Logica, di W. STANLEY JEVONS, traduz. del Prof. C. CANTONI, 5ª ediz. di pag. VIII-166, con 15 incisioni. . . . 1 50

Logica matematica, del Prof. C. BURALI-FORTI, p. VI-158. 1 50

Logismografia, di C. CHIESA, 3ª ediz., pag. XIV-172 . . 1 50

Logogrifi — *vedi* Enimmistica.

Lotta — *vedi* Pugilato.

Luce e colori, del Prof. G. BELLOTTI, pag. X-157, con 24 incisioni e 1 tavola 1 50

Luce e suono, di E. JONES, traduzione di U. FORNARI, di pag. VIII-336, con 121 incisioni. . . . . 3 —

Luce e salute. Fototerapia e radioterapia del Dott. A. BELLINI, di pag. XII-362, con 65 figure 3 50

Macchine (Atlante di) e di Caldaie, con testo e note di Tecnologia, di pag. XV-80, con 112 tavole e 170 figure in iscala ridotta . . . . . 3 —

Macchine a vapore, (Manuale del costruttore di), di H. HAEDER. Edizione italiana compilata sulla 5ª edizione tedesca, con notevoli aggiunte dell'Ing. E. WEBBER, pag. XVI-452, con 1444 incisioni e 244 tabelle, legato in bulgaro rosso . 7 —

Macchine agricole. del Conte A. CENCELLI-PERTI, di pag. VIII-216, con 68 incisioni . . . . . 2 —

L. c.

Macchine per cucire e ricamare, dell'Ing. ALFREDO GALASSINI, pag. VII-230, con 100 incisioni 2 50

Macchinista e fuochista, del Prof. G. GAUTERO, riveduto e ampliato dall'Ing. Prof. LORIA, 9ª ediz. con Appendice sulle Locomobili e le Locomotive e col Regolamento sulle caldaie a vapore, pag. XX-194, con 84 incisioni . . . . 2 —

Macchinista navale (Manuale del), di M. LIGNAROLO, 2ª ed. rifatta, pag. XXIV-602, con 344 incisioni 7 50

Macinazione — *vedi* Industrie dei molini — Panificazione.

Magnetismo ed elettricità. Principi e applicazioni esposti elementarmente, del Prof. F. GRASSI. 3ª ediz. completamente rifatta del manuale di POLONI e GRASSI, di pagine XVI-508, con 280 figure 6 tavole fuori testo . . . 5 50

Magnetismo ed ipnotismo, del Dottor G. BELFIORE, 2ª ed. rifatta pag. VIII-396 . . . . . 3 50

Maiale (Il). Razze, metodi di riproduzione, di allevamento, ingrassamento, commercio, salumeria, patologia suina e terapeutica, tecnica operatoria, tossicologia, dizionario suino-tecnico, del Prof. E. MARCHI, 2ª ediz., pag. XX-736, con 190 incisioni e una Carta 6 50

Maioliche e porcellane (L'amatore di), di L. DE MAURI, illustrato da splendide *incisione in nero*, da *12 superbe tavole a colori* e da *3000 marche*. - Contiene: Tecnica della fabbricazione - Sguardo generale sulla storia delle Ceramiche dai primi tempi fino ai giorni nostri - Cenni storici ed artistici su tutte le fabbriche - Raccolte di 3000 marche corredate ognuna di notizie relative, e coordinate ai Cenni Storici in modo che le ricerche riescano di *esito immediato* - Dizionario di termini Artistici aventi relazione coll'Arte Ceramica e di oggetti Ceramici speciali, coi prezzi correnti. Bibliografia ceramica, indici vari, pag. XII-650 . . . . . 12 50

Mais (Il) o granoturco, o formentone, o granone, o melgone, o melica, o melicotto, o carlone, o polenta, ecc. Norme per una buona coltivazione, di E. AZIMONTI, 2ª edizione rifatta dal Manuale " Frumento e Mais „ di E. CANTONI, di pag. XII-196 con 61 incisioni nel testo 2 50

Malattie dei paesi caldi, del Dott. C. MUZIO. (In lavoro).

Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate, del Dott. R. WOLF, traduzione con note ed aggiunte del Dott. P. BACCARINI, pag. X-268, con 50 incisioni . . . . . 2 —

Malattie ed alterazione dei vini, del Prof. S. CETTOLINI, di pag. XI-138, con 13 incisioni. . . . . 2 —

Malattie della vite — *vedi* Filossera — Malattie crittogamiche.

Mammiferi — *vedi* Zoologia.

Mandarini — *vedi* Agrumi.

Malattie del sangue. Manuale d'Ematologia del Dott. E. REBUSCHINI, pag. VIII-432 . . . . . 3 50

Mandato commerciale, di E. VIDARI, pag. VI-160. . . . 1 50

L. c.

Mandolinista (Manuale del), di A. PISANI, pag. XX-140, con 18 figure, 3 tavole e 39 esempi. . . . . 2 —

Manicomio — *vedi* Assistenza pazzi — Psichiatria.

Manzoni Alessandro. Cenni biografici, di L. BELTRAMI, di pag. 109, con 9 autografi e 68 incisioni. 1 50

Marche di Fabbrica — *vedi* Amatore oggetti d'arte — Leggi sulle proprietà — Majoliche.

Mare (Il). V. BELLIO, pag. IV-140, con 6 tav. lit. a colori. 1 50

Marine (Le) **da guerra del mondo al 1897,** di L. D'ADDA, pag. XVI-320, con 77 illustrazioni 4 50

Marino (Manuale del) **militare e mercantile,** del Contr'ammiraglio DE AMEZAGA, con 18 xilografiie, 2ª edizione, con appendice di BUCCI DI SANTAFIORA . . . . . 5 —

Marmista (Manuale del), di A. RICCI, 2ª edizione, pag. XII-154, con 47 incisioni . . . . . 2 —

Marmo — *vedi* Imitazioni.

Massaggio, del Dott. R. MAJNONI, p. XII-179, con 51 inc. . 2 —

Mastici — *vedi* Ricettario industriale — Vernici, ecc.

Matematica (Complementi di) ad uso dei chimici e dei naturalisti, di G. VIVANTI, di pag. X-381 . . . . . 3 —

Matematiche superiori (Repertorio di). Definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici, del Prof. E. PASCAL.

Vol. I. *Analisi*, pag. XVI-642 . . . . . 6 —

Vol. II. *Geometria*, e indice gen. per i 2 vol. pag. 950 9 50

Materia medica moderna (Man. di), G. MALACRIDA, p. XI-761 7 50

Materiali artificiali — *v.* Ricettario indust. — Imitaz. e succedanei.

Meccanica, del Prof. R. STAWELL BALL, traduzione del Prof. J. BENETTI, 4ª edizione, pag. XVI-214, con 89 inc.. 1 50

Meccanica (La) **del macchinista di bordo,** per gli Ufficiali macchinisti della R. Marina, i macchinisti delle Compagnie di navigazione, i Costruttori e i Periti meccanici, gli Allievi degli Istituti Tecnici e Nautici e delle Scuole Industriali e Professionali, di E. GIORLI, con 92 figure . . . 2 50

Meccanico (Il), ad uso dei capi tecnici, macchinisti, elettricisti, disegnatori, assistenti, capi operai, conduttori di caldaie a vapore, alunni di Scuole industriali, di E. GIORLI, 4ª edizione ampliata, pag. XVI-424, con 204 incisioni . . 3 —

Meccanismi (500), scelti fra i più importanti e recenti riferentisi alla dinamica, idraulica, idrostatica, pneumatica, macchine a vapore, molini, torchi, orologerie, ecc., di H. T. BROWN, trad. d. Ing. F. CERRUTI, 3ª edizione italiana, pag. VI-176, con 500 incisioni 2 50

Medaglie — *vedi* Leghe metalliche — Monete greche — Monete romane — Numismatica — Vocabolarietto dei numismatici.

Medicatura antisettica, del Dott. A. ZAMBLER, con prefazione del Prof. E. TRIGONI, pag. XVI-124, con 6 incis. . 1 50

L. c.

Medicina operativa — *vedi* Chirurgia.

Medico pratico, (Il) di C. MUZIO. 8ª edizione del Nuovo memoriale pei medici pratici, di pag. XVI-492 . . . . 5 —

Memoria (L'arte della) — *vedi* Arte.

Mercedi — *vedi* Paga giornaliera.

Merciologia, ad uso delle scuole e degli agenti di commercio, di O. LUXARDO, pag. XII-452. . . . . 4 —

Meridiane — *vedi* Gnomonica.

Metalli preziosi (oro, argento, platino, estrazione, fusione, assaggi, usi), di G. GORINI, 2ª ed., p. II-196, con 9 inc. . 2 —

Metallizzazione — *v.* Galvanizz.— Galvanoplastica — Galvanostegia.

Metallocromia. Colorazione e decorazione chimica ed elettrica dei metalli, bronzatura, ossidazione, preservazione e pulitura, dell'Ing. I. GHERSI, pag. VIII-192. . . . . 2 50

Metallurgia — *vedi* Coltivazione delle miniere — Fonditore — Leghe metalliche — Siderurgia — Tempera e cementazione.

Meteorologia generale, del Dott. L. DE MARCHI, pag. VI-156, con 8 tavole colorate. 1 50

vedi anche — Climatologia — Igroscopi.

Metrica dei greci e dei romani, di L. MÜLLER, 2ª edizione italiana confrontata colla 2ª tedesca ed annotata dal Dott. GIUSEPPE CLERICO, pag. XVI-186. . . . . 1 50

Metrica italiana — *vedi* Ritmica e metrica italiana.

Metrologia Universale ed il **Codice Metrico Internazionale,** coll'indice alfabetico di tutti i pesi misure, monete, ecc., dell'Ing. A. TACCHINI, pag. XX-482 . . . . . 6 50

Mezzeria (Manuale pratico della) e dei vari sistemi della colonia parziaria in Italia, d. Prof. A. RABBENO, p. VIII-196 1 50

Micologia *vedi* Funghi mangerecci — Malattie crittogamiche — Tartufi e funghi.

Microbiologia. Perchè e come dobbiamo difenderci dai microbi. Malattie infettive, Disinfezioni, Profilassi, del Dott. L. PIZZINI, pag. VIII-142 . . . . . 2 —

Microscopia — *vedi* Anatomia microscopica — Animali parassiti — Bacologia — Batteriologia — Prostitologia — Tecnica prostitologica.

Microscopio (Il), Guida elementare alle osservazioni di Microscopia, del Prof. CAMILLO ACQUA, p. XII-226, 81 inc. 1 50

Mineralogia generale, del Prof. L. BOMBICCI, 2ª ediz. riveduta, di pag. XVI-190, con 183 inc. e 3 tavole . . . 1 50

Mineralogia descrittiva, del Prof. L. BOMBICCI, 2ª edizione, di pag. IV-300, con 119 incisioni. . . . . 3 —

Miniere (Coltivazione delle), di S. BERTOLIO, 2ª ediz. rifatta del Man. " *Arte Min.* „ di ZOPPETTI, p. VIII-284 . 2 50

Miniere di zolfo — *vedi* Zolfo.

Misurazione delle botti — *vedi* Enologia.

L. c.

Misure — *vedi* Avarie e sinistri marittimi — Codice del Perito Misuratore — Metrologia — Monete — Strumenti metrici.

Mitilicoltura — *vedi* Ostricoltura — Piscicoltura.

Mitologia (Dizionario di), di F. RAMORINO. (In lavoro).

Mitologia comparata, del Prof. A. DE GUBERNATIS, 2ª edizione, di pag. VIII-150. (Esaurito).

Mitologia greca, di A. PORESTI:
Volume I. *Divinità*, di pag. VIII-264 . . . . . 1 50
Volume II. *Eroi*, di pag. 188 . . . . . 1 50

Mitologie orientali, di D. BASSI:
Vol. I. *Mitologia babilonese-assira*, pag. XVI-219 . . 1 50
Vol. II. *Mitologia egiziana e fenicia.* (In lavoro).

Mnemotecnia — *vedi* Arte della memoria.

Mobili artistici — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte.

Moda — *vedi* Abiti — Biancheria — Fiori artificiali — Trine.

Modellatore meccanico, falegname ed ebanista, del Prof. G. MINA, pag. XVII-428, con 293 incisioni e 1 tavola . 5 50

Molini (L'Industria dei) **e la macinazione del frumento,** di C. SIBER-MILLOT, di pag. XX-259, con 103 incisioni nel testo e 3 tavole . . . . . 5 —

Momenti resistenti e pesi di travi metalliche composte. Prontuario ad uso degli Ingegneri, Architetti e costruttori, con 10 figure ed una tabella per la chiodatura, dell'Ing. E. SCHENCK, di pag. XI-188 . . . . . 3 50

Monete greche, di S. AMBROSOLI, di pag. XIV-286, con 200 fotoincisioni e 2 carte geografiche . . . . . 3 —

Monete (Prontuario delle), **pesi e misure inglesi,** ragguagliate a quelle del sistema decimale, dell'Ing. GHERSI, di pag. XII-196, con 47 tabelle di conti fatti e 40 facsimili delle monete in corso 3 50

Monete romane. Manuale elementare compil. da F. GNECCHI, 2ª edizione, riveduta corretta ed ampliata, di pag. XXVII-370, con 25 tavole e 90 figure nel testo . . . . 3 —

Monogrammi, del Prof. A. SEVERI, 73 tavole divise in tre serie, le prime due di 462 in due cifre e la terza in 116 in tre cifre 3 50

Montatore (Il) **di macchine.** Opera arricchita da oltre 250 esempi pratici e problemi risolti, di S. DINARO, di pagine XII-„68 . . . . . 4 —

Morfologia generale — *vedi* Embriologia.

Morfologia greca, del Prof. V. BETTEI, pag. XX-376 . . 3 —

Morfologia italiana, del Prof. E. GORRA, pag. VI-142 . . 1 50

Morte (La) **vera e la morte apparente,** con appendice " *La*

L. c.

legislazione mortuaria „ di F. DELL'ACQUA, p. VIII-136 . 2 —

Mosti (Densità dei), **dei vini e degli spiriti ed i problemi che ne dipendono,** ad uso degli enochimici, degli enotecnici e dei distillatori, di E. CILLIS, di pag. XVI-230, con 11 figure e 46 tavole . . . . . 2 —

Musei — *vedi* Amatore oggetti d'arte e curiosità — Amatore maioliche e porcellane — Armi antiche — Pittura — Scoltura.

Mutuo soccorso — *vedi* Società mutuo soccorso

Napoleone I°, di L. CAPPELLETTI, 23 fotoinc., p. XX-272 . 2 50

Naturalista preparatore (Il), del Dott. R. GESTRO, 3ª edizione riveduta ed aumentata del *Manuale dell'Imbalsamatore*, di pag. XVI-168, con 42 incisioni . . . . . 2 —

Naturalista viaggiatore, del Prof. A. ISSEL e R. GESTRO (Zoologia), di pag. VIII-144, con 38 incisioni . . . . . 2 —

Nautica stimata o Navigazione piana di F. TAMI, di pag. XXXII-179, con 47 incisioni 2 50

Neurotteri — *vedi* Imenotteri.

Nevrastenia del Dott. L. CAPPELLETTI di pag, XX-490 . 4 —

Nichelatura — *vedi* Galvanostegia.

Notaio (Manuale del), aggiunte le Tasse di registro, di bollo ed ipotecarie, norme e moduli pel Debito pubblico, di A. GARETTI, 4ª ediz. riveduta e ampliata, pag. VIII-380 . . 3 50

Numeri — *vedi* Teoria dei numeri.

Numismatica, del Dott. S. AMBROSOLI, 3.ª ediz. riveduta, di pag. XVI-250, con 250 fotoinc. e 4 tav. 1 50

Numismatica — *vedi* Guida numismatica.

Nuotatore (Manuale del), del Prof. P. ABBO, di pag. XII-148, con 97 incisioni 2 50

Nutrizione del bambino. Allattam. naturale ed artificiale, del Dott. L. COLOMBO, pag. XX-228, con 12 incisioni. . 2 50

Occultismo — *vedi* Magnet. e ipnotismo — Spiritismo — Telepatia.

Oculistica — *vedi* Igiene della vista — Ottica.

Odontologia — *vedi* Igiene della bocca.

Olii vegetali, animali e minerali, loro applicazioni di G. GORINI, 2ª edizione completamente rifatta dal Dott. G. FABRIS, di pag. VIII-214, con 7 incisioni . . . . . 2 —

Olivo ed olio. Coltivazione dell'olivo, estrazione, purificazione e conservazione dell'olio, del Prof. A. ALOI, 5ª edizione accresciuta e rinnovata, di p. XVI-365, con 65 inc. 3 —

Omero, di W. GLADSTONE, traduzione di R. PALUMBO e C. FIORILLI, di pag. XII-196 . . . . . 1 50

Onde Hertziane — *vedi* Telegrafo senza fili.

Operaio (Manuale dell'). Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili agli operai tornitori, fabbri, calderai, fonditori di metalli, bronzisti, aggiustatori e meccanici di G. BELLUOMINI, 5ª ediz. aumentata, di pag. XVI-262 . . . 2 —

L. c.

Operazioni doganali — *vedi* Codice doganale — Trasporti e tariffe.
Oratoria — *vedi* Arte del dire — Rettorica — Stilistica.
Ordinamento degli Stati liberi d'Europa, del Dott. F. RACIOPPI, 2ª edizione, di pag. XII-316 . . . . . 3 —
Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa, del Dott. F. RACIOPPI, di pag. VIII-376 . . . . . 3 —
Ordinamento giudiziario — *vedi* Leggi sull'.
Oreficieria — *vedi* Gioielleria — Leghe metalliche — Metalli preziosi — Saggiatore.
Organoterapia, di E. REBUSCHINI, pag. VIII-432 . . . . 3 50
Oriente antico — *vedi* Storia antica.
Ornatista (Manuale dell'), dell'Arch. A. MELANI. Raccolta di iniziali miniate e incise, d'inquadrature di pagina, di fregi e finalini, esistenti in opere antiche di biblioteche, musei e collezioni private. XXIV tavole in colori per miniatori, calligrafi, pittori di insegne, ricamatori, incisori, disegnatori di caratteri, ecc., Iª serie, in-8 . . . . . 4 50
Orologeria moderna, dell'Ing. GARUFFA, di pag. VIII-302, con 276 incisioni . . . . . 5 —
— *vedi anche* Gnomonica.
Orologi artistici — *vedi* Amatore di oggetti d'arte.
Orologi solari — *vedi* Gnomonica.
Orticoltura del Prof. D. TAMARO, 2ª edizione rifatta, di pagine XVI-576, con 110 incisioni 4 50
Ortocromatismo — *vedi* Fotografia.
Ortofrenia (Manuale di), per l'educazione dei fanciulli frenastenici o deficienti (idioti, imbecilli, tardivi, ecc.), del Prof. P. PARISE, di pag. XII-231 . . . . . 2 —
Ortotteri — *vedi* Imenotteri ecc.
Ossidazione — *vedi* Metallocromia.
Ostetricia (Manuale di) *Ginecologia minore,* per le levatrici di L. M. BOSSI, di pag. XV-493, con 113 incisioni 4 50
Ostricoltura e mitilicoltura, del Dott. D. CARAZZI, con 13 fototipie, di pag. VIII-202 . . . . . 2 50
Ottica, di E. GELCICH, pag. XVI-576, con 216 incis. e 1 tav. 6 —
Ottone — *vedi* Leghe metalliche.
Paga giornaliera (Prontuario della), **da cinquanta centesimi a lire cinque,** di C. NEGRIN, di pag. 222. . . . 2 50
Paleoetnologia, del Prof. J. REGAZZONI, di pag. XI-252, con 10 incisioni 1 50
Paleografia, di E. M. THOMPSON, traduzione dall'inglese, con aggiunte e note del Prof. G. FUMAGALLI, 2ª edizione rifatta, di pag. XII-178, con 30 inc. e 6 tav, ... 2 —
Paleontologia (Compendio di), del Prof. P. VINASSA DE REGNY, di pag. XVI-512, con 356 figure intercalate . . 5 50

L. c.

Pallone (Giuoco del) — *vedi* Giuoco.

Panificazione razionale, di POMPILIO, pag. IV-126 . . . 2 —

Parafulmini — *vedi* Elettricità — Fulmini.

Pazzia — *vedi* Psichiatra — Grafologia.

Pediatria — *vedi* Nutrizione del bambino — Ortopedia — Terapia malattie infanzia.

Pellagra (La), Storia, eziologia, patogenesi, profilassi. di G. ANTONINI, di pag. VIII-166 con 2 tav. . . . . 2 —

Pelle — *vedi* Igiene della.

Pelli — *vedi* Concia delle pelli.

Pensioni — *vedi* Società di mutuo soccorso.

Pepe — Prodotti agricoli.

Perfosfati — *vedi* Fosfati — Concimi — Chimica agraria.

Perito — *vedi* Codice nel perito misuratore — Ingegneria legale.

Pesci — *vedi* Ittiologia — Ostricoltura — Piscicoltura.

Pesi e misure — *vedi* Avarie e sinistri marittimi — Metrologia — Misure e pesi inglesi — Monete — Strumenti metrici — Tecnologia monetaria.

Peso dei metalli, ferri quadrati, rettangolari, cilindrici, a squadra, a U, a Y, a Z, a T e a doppio T, e delle lamiere e tubi di tutti i metalli, di G. BELLUOMINI, di pag. XXIV-248. . . . . 3 50

Pianeti — *vedi* Astron. — Cosmogr. — Gravit. — Spettroscopio.

Pianista (Manuale del), di L. MASTRIGLI, pag. XVI-112 . 2 —

Piante e fiori sulle finestre, sulle terrazze e nei cortili. Coltura e descrizione delle principali specie di varietà, di A. PUCCI, 2ª edizione, pag. VIII-214, con 117 incisioni . 2 50

Piante industriali, coltivazione, raccolta, preparazione, di G. GORINI, nuova edizione, di pag. II-144. . . . . 2 —

Piante tessili (Coltivazione ed industrie delle), propriamente dette e di quelle che danno materia per legacci, lavori d'intreccio, sparteria, spazzole, scope, carta, ecc., coll'aggiunta di un dizionario delle piante ed industrie tessili, di oltre 3000 voci, del Prof. M. A. SAVORGNAN D'OSOPPO, di pag. XII,-476, con 72 incisioni. . . . . 5 —

Piccole industrie — *vedi* Industrie.

Pietre artificiali — *vedi* Imitazioni.

Pietre preziose, classificazione, valore, arte del giojelliere, di G. GORINI, 2ª edizione, di pag. 138, con 12 incisioni. 2 —

Pirotecnia moderna, di F. DI MAIO, 2ª edizione riveduta ed ampliata, di pag. XV-183 con 21 incisioni. 2 50

Piscicoltura (d'acqua dolce), del Dott. E. BETTONI, di pagine VIII-318, con 85 incisioni . . . . . 3 —

Pittura ad olio, acquarello e miniatura (Manuale per dilettante di), paesaggio, figura e fiori, di G. RONCHETTI, pag. XVI-230, 29 incis. e 24 Tav. in zincot. e cromolit. . 3 50

Pittura italiana antica e moderna, dell'Arch. A. MELANI,

L. c.

2ª edizione completamente rifatta, di pag. XXX-430 con 23 incisioni intercalate e 137 tavole 7 50

Plastica — *vedi* Imitazioni.

Pollicoltura, del March. G. TREVISANI, 5ª edizione rifatta, di pagine XVI-230, con 90 incisioni 2 50

Polveri piriche — *vedi* Esplodenti — Pirotecnia.

Pomologia, descrizione delle migliori varietà di Albicocchi, Ciliegi, Meli, Peri, Peschi, del Dott. G. MOLON, con 86 incisioni e 12 tavole colorate, di pag. XXXII-717 . . . 8 50

Pomologia artificiale, secondo il sistema Garnier-Valletti, del Prof. M. DEL LUPO, pag. VI-132, e 34 incisioni . . 2 —

Poponi — *vedi* Frutta minori.

Porcellane — *vedi* Maioliche — Ricettario domestico.

Porco (Allevamento del) — *vedi* Maiale.

Porti di mare — *vedi* Lavori marittimi.

Posologia — *vedi* Impiego ipodermico.

Posta. Manuale Postale di A. PALOMBI. Notizie storiche sulle Poste d'Italia, organizzazione, legislazione, posta militare, unione postale universale, con una appendice contenente le norme relative ad alcuni servizi accessori della posta, di pag. XXX-309 . . . . . 3 —

Prato (Il), del Prof. G. CANTONI, di pag. 146, con 18 inc. 2 —

Prealpi bergamasche (Guida-itinerario alle), compresa la Valsassina ed i Passi alla Valtellina ed alla Valcamonica, colla prefazione di A. STOPPANI, e cenni geologici di A. TARAMELLI, 3ª edizione rifatta per cura della Sezione di Bergamo del C. A. I., con 15 tavole, due carte topografiche, ed una carta e profilo geologico. Un volume di pag. 290 e un vol. colle carte topografiche in busta . . 6 50

Pregiudizi — *vedi* Errori e pregiudizi. Leggende popolari.

Previdenza — *vedi* Assicuraz. — Cooperaz. — Società di M. S.

Privative industriali — *vedi* Leggi sulle — Ingegneria legale.

Problemi di Geometria elementare, dell'Ing. I. GHERSI, (Metodi facili per risolverli), con circa 200 problemi risolti, e 119 incisioni, di pag. XII-160 . . . . . 1 50

Procedura civile e procedura penale — *vedi* Codice.

Procedura privilegiata fiscale per la riscossione delle imposte dirette — *vedi* Esattore.

Processi fotomeccanici (I moderni). Fotocollografia, fototipografia, fotocalcografia, fotomodellatura, tricromia, del Prof. R. NAMIAS, p. VIII-316, 53 fig., 41 illustr. e 9 tav. 3 50

Prodotti agricoli del Tropico (Manuale pratico del piantatore), del Cav. A. GASLINI. (Il caffè, la canna da zuc-

L. c

chero, il pepe, il tabacco, il cacao, il tè, il dattero, il cotone, il cocco, la coca, il baniano, l'aloè, l'indaco, il tamarindo, l'ananas, l'albero del chinino, la juta, il baobab, il papaia, l'albero del caoutchouc, la guttaperca, l'arancio, le perle). Di pag. XVI-270 . . . . . 2 —

Produzione e commercio del vino in Italia, di S. MONDINI, di pag. VII-303 . . . . . 2 50

Profumiere (Manuale del), di A. ROSSI, con 700 ricette pratiche, di pag. IV-476 e 58 incisioni . . . . . 5 —

— *vedi anche* Ricettario domest. — Ricettario industr. — Saponi.

Proiezioni (Le). Materiali, Accessori, Vedute a movimento, Positive sul vetro, Proiezioni speciali policrome, stereoscopiche, panoramiche, didattiche, ecc., del Dott. L. SASSI di pag. XVI-447, con 141 incisioni. . . . . 5 —

Proiezioni ortogonali — *vedi* Disegno.

Prontuario di geografia e statistica, del Prof. G. GAROLLO, pag. 62 . . . . . 1 —

Prontuario per le paghe — *vedi* Paghe — Conti fatti.

Proprietà letteraria, artistica e industriale — *vedi* Leggi.

Proprietario di case e di opifici. Imposta sui fabbricati, dell'Avv. G. GIORDANI, di pag. XX-264. . . . . 1 50

Prosodia — *vedi* Metrica dei greci e dei romani — Ritmica.

Prospettiva (Manuale di), dell'Ing. L. CLAUDI, 2ª edizione riveduta di pagine XI-61 con 28 tavole . . . . . 2 —

Protezione degli animali (La), di NIGRO LICÒ, p. VIII-200 2 —

Protistologia, di L. MAGGI, 2ª ed., p. XVI-278, 93 incis. . . 3 —

Prototipi (I) internazionali del metro e del kilogramma ed il codice metrico internazionale — *vedi* Metrologia.

Proverbi in 4 lingue — *vedi* Dottrina popolare.

Proverbi (516) **sul cavallo**, raccolti od annotati dal Colonnello VOLPINI, di pag. XIX-172 . . . . . 2 50

Psichiatra. Confini, cause e fenomeni della pazzia. Concetto, classificazione, forme cliniche o diagnosi delle materie mentali. Il manicomio, di J. FINZI, pag. VIII-225 . 2 50

Psicologia, del Prof. C. CANTONI, pag. VIII-168, 2ª ediz. . 1 50

Psicologia fisiologica, del Dott. G. MANTOVANI, pag. VIII-165. con 16 incisioni 1 50

Psicologia musicale. Appunti, pensieri e discussioni, di M. PILO di pag. x-259 . . . . . 2 50

Psicoterapia di G. PORTIGLIOTTI, di pag. XII-318, 22 inc. 3 —

Pugilato e lotta per la difesa personale, Box inglese e francese, di A. COUGNET, pag. XXIV-198, 104 incis. . 2 50

Raccoglitore (Il) di J. GELLI (In lavoro).

Rachitide (La) **e le deformità da esse prodotte**, del Dott. P. MANCINI. (In lavoro).

Radiografia — *vedi* Raggi Röntgen.

Radioterapia — *vedi* Luce e salute.

Ragioneria, del Prof. V. GITTI, 4ª edizione riveduta, di pag. VIII-141, con 2 tavole 1 50

L. c.

Ragioneria delle cooperative di consumo (Manuale di), del Rag. G. ROTA, di pag. XV-408 . . . . . 3 —

Ragioneria industriale, del Prof. Rag. ORESTE BERGAMASCHI, di pag. VII-280 e molti moduli . . . . . 3 —

Ragioniere (Prontuario del). (Manuale di calcolazioni mercantili e bancarie), di E. GAGLIARDI, pag. XII-603 . . 6 50

Ramatura — *vedi* Galvanostegia.

Razze bovine, equine, suine, ovine e caprine di F. FAELLI, di pag. XX-372, con 75 illustrazioni delle quali 16 colorate 5 50

Rebus — *vedi* Enimmistica.

Reclami ferroviarii — *vedi* Trasporti e tariffe.

Registro e Bollo — *vedi* Leggi sulle tasse di.

Regolo calcolatore e sue applicazioni nelle operazioni topografiche, dell'Ing. G. POZZI, di pag. XV-238, con 182 incisioni e 1 tavola 2 50

Religioni e lingue dell'India inglese, di R. CUST, tradotto dal Prof. A. DE GUBERNATIS, di pag. IV-124 . . . . 1 50

Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni, di P. GALLIZIA, pag. X-336, con 236 inc. e 2 tavole . . . 5 50

Responsabilità — *vedi* Ingegneria legale.

Rettili — *vedi* Zoologia.

Rettorica, ad uso delle Scuole, di F. CAPELLO, p. VI-122. 1 50

Ribes — *vedi* Frutta minori.

Ricami — *vedi* Biancheria — Macchine da cucire — Monogrammi — Piccole industrie — Ricettario domestico — Trine.

Ricchezza mobile, dell'Avv. E. BRUNI, pag. VIII-218 . . 1 50

Ricettario domestico, dell'Ing. I. GHERSI. Adornamento della casa. Arti del disegno. Giardinaggio. Conservazione di animali, frutti, ortaggi, piante. Animali domestici e nocivi. Bevande. Sostanze alimentari. Combustibili e illuminazione. Detersione e lavatura. Smacchiatura. Vestiario. Profumeria e toeletta. Igiene e medicina. Mastici e plastica. Colle e gomme. Vernici ed encaustici. Metalli. Vetrerie, di pag. 550 con 2340 consigli pratici e ricette accuratamente scelte. . 5 50

Ricettario industriale, dell'Ing. I. GHERSI. Procedimenti utili nelle arti, industrie e mestieri, caratteri; saggio e conservazione delle sostanze naturali ed artificiali d'uso comune; colori, vernici, mastici, colle, inchiostri, gomma elastica, materie tessili, carta, legno, fiammiferi, fuochi d'artificio, vetro; metalli, bronzatura, nichelatura, argentatura, doratura, galvanoplastica, incisione, tempera, leghe; filtrazione; materiali impermeabili, incombustibili, artificiali; cascami, olii, saponi, profumeria, tintoria, smacchiatura, imbianchimento; agricoltura, elettricità; 2ª edizione, rifatta e

L. c.

aumentata, di pag. VII-704, con 27 inc. e 2886 ricette . . 6 50

Ricettario fotografico. Terza edizione riveduta e notevolmente ampliata di nuove formole e procedimenti, del Dott. L. SASSI, di pag. XXIV-229 . . . . . 2 —

Rilievi — *vedi* Cartografia — Compens. errori — Telemetria.

Risorgimento italiano (Storia del) **1814-1870,** con l'aggiunta di un sommario degli eventi posteriori, del Prof. F. BERTOLINI, 2ª ediz,, di pag. VIII-208 . . . . . 1 50

Ristauratore dei dipinti, del Conte G. SECCO-SUARDO, 2 volumi, di pag. XVI-269, XII-862, con 47 incisioni. . . 6 —

Ritmica e metrica razionale italiana, del Prof. ROCCO MURARI, di pag. XVI-216. . . . . 1 50

Rivoluzione francese (La) (1789-1799), del Prof. Dott. GIAN PAOLO SOLERIO, di pag. IV-176. . . . . 1 50

Roma antica — *vedi* Mitologia — Monete — Topografia.

Röntgen (I raggi di) **e le loro pratiche applicazioni,** di ITALO TONTA, pag. VIII-160, con 65 incis e 14 tavole . 2 50 — *vedi anche* — Fototerapia e radioterapia.

Rhum — *vedi* Liquorista.

Saggiatore (Manuale del), di F. BUTTARI, di pag. VIII-245, con 28 incisioni 2 50

Sale (Il) **e le Saline,** di A. DE GASPARIS. (Processi industriali, usi del sale, prodotti chimici, industria manifatturiera, industria agraria, il sale nell'economia pubblica e nella legislazione), di pag. VIII-358, con 24 incisioni . 3 50

Salumiere — *vedi* Majale.

Sanatorii — *vedi* Tisici e sanatorii.

Sanità e sicurezza pubblica. — Vedi *Leggi sulla.*

Sanscrito (Avviamento allo studio del), del Prof. F. G. FUMI, 2ª edizione rifatta, di pag. XII-254 . . . . . 3 —

Saponi (L'industria saponiera), con alcuni cenni sull'industria della soda e della potassa. Materia prima e fabbricazione in generale. Guida pratica dell'Ing. E. MARAZZA, (esaurito, è in lavoro la 2ª edizione).

Sarta da donna — *vedi* Abiti — Biancheria.

Scacchi (Manuale del giuochi degli), di A. SEGHIERI, 2ª ediz. ampliato da E, ORSINI, con una appendice alla sezione delle partite giuocate e una nuova raccolta di 52 problemi di autori ital., di pag. VI-310, con 191 incis. . 3 —

Scaldamento e ventilazione degli ambienti abitati, di R. FERRINI, 2ª ediz., di pag. VIII-300, con 98 incisioni. . . 3 —

Scenografia (La). Cenni storici dall'evo classico ai nostri giorni, di G. FERRARI, di pag. XXIV-327, con 16 incisioni nel testo, 160 tavole e 5 tricromie . . . . 12 —

L. c

Scherma italiana di J. GELLI, 2ª ediz., di pagine VI-251, con 108 figure 2 50

Sciarade — *vedi* Enimmistica.

Scienza delle finanze, di T. CARNEVALI, pag. IV-140 . . 1 50

Scritture d'affari (Precetti ed esempi di), per uso delle Scuole tecniche, popolari e commerciali, del Prof. D. MAFFIOLI, 3ª ediz. ampliata e corretta, di pag. VIII-221 . . 1 50

Sconti — *vedi* Interesse e sconto.

Scoperte geografiche — *vedi* Cronologia.

Scultura italiana antica e moderna (Manuale di), dell'Arch. A. MELANI, 2ª edizione rifatta con 24 incisioni nel testo e 100 tavole, di pag. XVII-248 . . . . . 5 —

Scuole industriali — *vedi* Industrie (Piccole).

Segretario comunale — *vedi* Esattore.

Selvicoltura, di A. SANTILLI, di pag. VIII-220, e 46 inc. . 2 —

Semeiotica. Breve compendio dei metodi fisici di esame degli infermi, di U. GABBI, di pag. XVI-216, con 11 inc. 2 50

Sericoltura — *vedi* Bachi da seta — Filatura — Gelsicultura — Industria della seta — Tintura della seta.

Servitù — *vedi* Ingegneria legale.

Shakespeare, di DOWDEN, trad. di A. BALZANI, p. XII-242 1 50

Seta (Industria della), del Prof. L. GABBA, 2ª ed., p. IV-208 2 —

Seta artificiale — *vedi* Imitazioni.

Sicurezza pubblica — *vedi* Leggi di sanità.

Siderurgia (Manuale di), dell'Ing. V. ZOPPETTI, pubblicato e completato per cura dell'Ing. E. GARUFFA, di pag. IV-368, con 220 incisioni 5 50

Sieroterapia, del Dott. E. REBUSCHINI, di pag. VIII-424 . 3 —

Sigle epigrafiche — *vedi* Dizionario di abbreviature.

Sinistri marittimi — *vedi* Liquidatore di avarie.

Sintassi francese, razionale pratica, arricchita della parte storico-etimologica, della metrica, della fraseologia commerciale, ecc., del Prof. D. RODARI, di pag. XVI-206 . 1 50

— (Esercizi relativi alla) del Prof. D. RODARI. (in lavoro).

Sintassi latina, di T. G. PERASSI, di pag. VII-168 . . . 1 50

Sismologia, del Capitano L. GATTA, di pag. VIII-175, con 16 incisioni e 1 carta 1 50

Smacchiature — *vedi* Ricettario domestico.

Smalti — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte — Fotosmaltografia — Ricettario industr.

Soccorsi d'urgenza, del Dott. C. CALLIANO, 4ª edizione riveduta ed ampliata, di pag. XLVI-352, con 6 tav. litogr. 3 —

Socialismo, di G. BIRAGHI, di pag. XV-285. . . . . 3 —

Società di mutuo soccorso. Norme per l'assicurazione delle pensioni e dei susssidi per malattia e per morte, del Dott. G. GARDENGHI, di pag. VI-152. . . . . 1 50

Società industriali italiane per azioni, del Dott. F. PICCINELLI, di pag. XXXVI-534. . . . . 5 50

L. c

Sociologia generale (Elementi di), del Dott. EMILIO MORSELLI, di pag. XII-172 . . . . . 1 50

Sofisticazione e adulterazione del vino e dell'aceto di A. ALOI (In lavoro),

Sordomuto (Il) **e la sua istruzione.** Manuale per gli allievi e le allieve delle R. Scuole normali, maestri e genitori, del Prof. F. FORNARI, di pag. VIII-232, coe 11 inc. 2 —

— *vedi anche* Ortofrenia.

Sostanze alimentari. — *vedi* Conservazione delle.

Specchi (La fabbricazione degli) **e la decorazione del vetro e cristallo,** del Professor R. NAMIAS, di pagine XII-156, con 14 incisioni . . . . . 2 —

Spettrofotometria (La) applicata alla Chimica fisiologica, alla Clinica e alla Medicina legale. Studio critico sperimentale di G. GALLERANI, di pag. XIX-395, con 92 incisioni e tre tavole 3 50

Spettroscopio (Lo) **e le sue applicazioni,** di R. A. PROCTOR, traduzione con note ed aggiunte di F. PORRO, di pag. VI-179, con 71 incis. e una carta di spettri . . . 1 50

Spiritismo, di A. PAPPALARDO, Seconda edizione, con 9 tavole, di pag. XVI-216 . . . . . 2 —

— *vedi anche* Magnetismo — Telepatia.

Spirito di vino — *vedi* Alcool — Cognac — Distillaz. — Liquorista.

Stagno (Vasellame di) — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Leghe metalliche.

Statica — *vedi* Metrologia — Strumenti metrici.

Statistica, del Pr. F. VIRGILII, 3ª ed., rifatta pag. XIX-225 1 50

Stearineria (L'industria stearica). Manuale pratico dell'Ing. E. MARAZZA, di pagine XI-284, con 70 incisioni e molte tabelle . . . . . 5 —

Stelle — *vedi* Astronomia — Cosmografia — Gravitazione — Spettroscopio.

Stemmi — *vedi* Araldica — Numismatica — Vocabol. araldico.

Stenografia, di G. GIORGETTI, (secondo il sistema Gabelsberger-Noe), 2ª ediz., (esaurito, è in lavoro la 3ª ediz.).

Stenografia (Guida per lo studio della) sistema Gabelsberger-Noe, compilata in 35 lezioni da A. NICOLETTI, 3ª ed. riveduta, di pag. VIII-160. . . . . 1 50

Stenografia. Esercizi graduali di lettura e di scrittura stenografica (sistema Gabelsberger-Noe), con 3 novelle del Prof. A. NICOLETTI, 2ª ediz., di pag. VIII-160 . . . . 1 50

— *vedi anche* Antologia stenografica — Dizionario stenografico.

Stenografo pratico (Lo) di L. CRISTOFOLI, di pag. XII-131 1 50

Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi e alla loro costruzione in carta, del Prof. A. RIVELLI, di pag. 90, con 92 incisioni e 41 tavole. . . . . 2 —

L. c.

Stilistica, del Prof. F. CAPELLO, di pag. XII-164. . . . 1 50

Stilistica latina, di A. BARTOLI. (In lavoro).

Stimatore d'arte — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Amatore di maioliche e porcellane — Armi antiche

Storia antica. Vol. I. *L'Oriente Antico*, del Prof. I. GENTILE, di pag. XII-232 . . . . . 1 50

Vol. II. *La Grecia*, di G. TONIAZZO, pag. IV-216 . . 1 50

Storia dell'Arte, del Dott. G. CAROTTI. (In lavoro).

Storia dell'arte militare antica e moderna, del Cap. V. ROSSETTO, con 17 tav. illustr., di pag. VIII-504. . . . 5 50

— *vedi anche* Armi antiche.

Storia e cronologia medioevale e moderna, in CC tavole sinottiche, del Prof. V. CASAGRANDI, 3ª edizione, con nuove correzioni ed aggiunte, di pag. VIII-254 . . . . 1 50

Storia della ginnastica. — Vedi *Ginnastica.*

Storia d'Italia (Breve), di P. ORSI, 2ª ed. rived., p. XII-276 . 1 50

Storia di Francia, dai tempi più remoti ai giorni nostri, di G. BRAGAGNOLO, di pag. XVI-424, con tabelle cronologiche e genealogiche . . . . . 3 —

Storia Ital. (Man. di), di C. CANTÙ, pag. IV-160 (esaurita).

Storia d'Inghilterra dai tempi più remoti ai giorni nostri, del Prof. G. BRAGAGNOLO, di pag. XVI-367 . . . . . 3 —

Storia della musica, del Dott. UNTERSTEINER, 2ª edizione ampliata, di pag. XII-330 . . . . . 3 —

Strumentazione, per E. PROUT versione italiana con note di V. RICCI, 2ª ediz. rived., di p. XVI-214, 95 incis. . . . 2 50

Strumenti ad arco (Gli) **e la musica da camera,** del Duca di CAFFARELLI, di pag. X-235. . . . . 2 50

Strumenti metrici (Principî di statica e loro applicazione alla teoria e costruzione degli), dell'Ing. E. BAGNOLI, di pag. VIII-252, con 192 incisioni 3 50

Stufe — *vedi* Scaldamento.

Suono — *vedi* Luce e suono.

Succedanei — *vedi* Ricettario industriale — Imitazioni.

Sughero — *vedi* Imitazioni e succedanei.

Surrogati — *vedi* Ricettario industriale — Imitazioni.

Sussidi — *vedi* Società di mutuo soccorso.

Tabacco, del Prof. G. CANTONI, di pag. IV-176, con 6 inc. 2 —

Tabacchiere artistiche — *vedi* Amatore di oggetti d'arte.

Tacheometria — *vedi* Celerimensura — Telemetria — Topografia — Triangolazioni.

Tamarindo — *vedi* Prodotti agricoli.

Tappezzerie — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.

Tariffe ferroviarie — *vedi* Codice dog. — Trasporti e tariffe.

L. c.

Tartufi (I) **ed i funghi,** loro natura, storia, coltura, conservazione e cucinatura, di FOLCO BRUNI, di pag. VIII-184 2 —

Tasse di registro, bollo, ecc. — *vedi* Codice di bollo — Esattore — Imposte — Leggi Tasse Reg. e Bollo — Notaio — Ricch. mob.

Tassidermista — *vedi* Imbalsamatare — Naturalista viaggiatore.

Tatuaggio — *vedi* Chiromanzia e tatuaggio.

Tè — *vedi* Prodotti agricoli.

Teatro — *vedi* Letteratura drammatica — Codice del teatro.

Tecnica microscopica — *vedi* Anatomia microscopica.

Tavole d'alligazione per l'oro e per l'argento con numerosi es. pratici per il loro uso, F. BUTTARI, p. XII-220 . 2 50

Tavole logaritmiche — *vedi* Logaritmi.

Tavole schematiche della Divina Commedia di Dante Alighieri, di L. POLACCO, seguite da sei tavole topogr. in cromolit. disegn. dal Maestro G. AGNELLI, pag. X-152 . 3 —

Tecnica protistologica, del Prof. L. MAGGI, pag. XVI-318 3 —

Tecnologia — *vedi* Dizionario tecnico.

Tecnologia meccanica — *vedi* Modellatore meccanico.

Tecnologia e terminologia monetaria, di G. SACCHETTI, di pag. XVI-191 . . . . . 2 —

Telefono, di D. V. PICCOLI, di p. IV-120, con 38 incis., L. 2. (Esaurito, è in lav. la 2ª ediz. complet. rifatta da G. MOTTA).

Telegrafia, del Prof. R. FERRINI, 2ª edizione corretta ed accresciuta, di pag. VIII-315, con 104 incisioni . . . . 2 —

Telegrafo senza fili e **Onde Hertziane** di O. MURANI, di pag. XV-341, con 172 incisioni 3 50

Telemetria, misura delle distanze in guerra, del Cap. G. BERTELLI, di pag. XIII-145, con 12 zincotipie . . . . 2 —

Telepatia (Trasmissione del pensiero), di A. PAPPALARDO, 2ª ediz. di pag. XVI-279 . . . . . 2 50

— *vedi anche* Magnetismo — Ipnotismo — Spiritismo.

Tempera e cementazione, dell'Ingegner FADDA, di pagine VIII-108, con 20 incisioni. . . . . 2 —

Teoria dei numeri (Primi elementi della), per il Prof. U. SCARPIS, di pag. VIII-152 . . . . . 1 50

Teoria delle ombre, con un cenno sul Chiaroscuro e sul colore dei corpi, del Prof. E. BONCI, di pag. VIII-164, con 36 tavole e 62 figure . . . . . 2 —

Terapia delle malattie dell'infanzia, del Dott. G. CATTANEO, di pag. XII-506 . . . . . 4 —

Termodinamica, Prof. G. CATTANEO, pag. X-196, 4 fig. . 1 50

Terremoti — *vedi* Sismologia — Vulcanismo.

Terreni — *vedi* Chimica agraria — Concimi — Humus.

Tessitore (Manuale del), del Prof. P. PINCHETTI, 2ª ediz. riveduta, di pag. XVI-312, con illustrazioni 3 50

L. c.

Tessuti di lana e di cotone (Analisi e fabbricazione dei). Manuale pratico razionale di O. GIUDICI, di pag. XII-864 con 1098 incisioni colorate 16 50

Testamenti (Manuali dei), per cura del Dott. G. SERINA, di pag. VI-238 . . . . . 2 50

Tigrè-italiano (Manuale), con due dizionarietti italiano-tigrè e tigrè-italiano ed una cartina dimostrativa degli idiomi parlati in Eritrea, del Cap. M. CAMPERIO, di pag. 180 . 2 50

Tintore (Manuale del), di R. LEPETIT, 3ª edizione, di pagine X-279, con 14 incisioni. . . . . 4 —

Tintura della seta, studio chimico tecnico, di T. PASCAL, di pag. XVI-482 . . . . . 5 —

Tipografia (Vol. I). Guida per chi stampa e fa stampare. - Compositori, Correttori, Revisori, Autori ed Editori, di S. LANDI, di pag. 280 . . . . . 2 50

Tipografia (Vol. II). Lezioni di composizione ad uso degli allievi e di quanti fanno stampare, di S. LANDI, di p. VIII-271, corredato di figure e di modelli. 2 50

— *vedi anche* Vocabolario tipografico.

Tisici e i Sanatorii (La cura razionale dei), del Dott. A. ZUBIANI, prefaz. del Prof. B. SILVA, p. XLI-240, 4 incis. 2 —

Titoli di rendita — *vedi* Debito pubblico — Valori pubblici.

Topografia e rilievi — *vedi* Cartografia — Catasto — Celerimensura — Compensazione errori — Curve — Disegno topografico — Estimo terreni — Estimo rurale — Fotogrammetria — Geometria pratica — Prospettiva — Regolo calcolatore — Telemetria — Triangolazioni.

Topografia di Roma antica, di L. BORSARI, di pag. VIII-486, con 7 tavole 4 50

Tornitore meccanico (Guida pratica del), ovvero sistema unico per calcoli in generale sulla costruzione di viti e ruote dentate, arricchita di oltre 100 problemi risolti, di S. DINARO, 2ª edizione, di pag. XII-175 . . . . . 2 —

Traduttore tedesco (Il), compendio delle principali difficoltà grammaticali della Lingua Tedesca. del Prof. R. MINUTTI, di pag. XVI-224. . . . . 1 50

Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali. Manuale pratico ad uso dei commercianti e privati, colle norme per l'interpretazione delle tariffe vigenti, di A. BIANCHI 2ª edizione rifatta. di pagine XVI-208. . 2 —

Travi metallici composti — Vedi *Momenti resistenti.*

Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali, dell'Ing. O. JACOANGELI. Modo di fondarle sulla rete geodetica, di rilevarle e calcolarle, di pag. XIV-340, con 32

L. c

incisioni, 4 quadri degli elementi geodetici, 32 modelli pei calcoli trigonometrici e tavole ausiliarie 7 50

Trigonometria — *vedi* Celerimensura — Esercizi Geometria metrica — Geometria metrica — Logaritmi.

Trigonometria della sfera — *vedi* Geometria e trigonom. della.

Trine (Le) **a fuselli in Italia.** Loro origine discussione, confronti, cenni bibliografici, analisi, divisione, istruzioni tecnico-pratiche con 200 illustrazioni intercalate nel testo di GIACINTA ROMANELLI-MARONE, di pag. VIII-331 . . 4 50

Tubercolosi — *vedi* Tisici.

Uccelli canori (I nostri migliori); loro caratteri e costumi. Modo di abituarli e conservarli in schiavitù. Cura delle loro infermità. Maniera per ottenere la riproduzione del Canarino, di L. UNTERSTEINER, di pag. XII-175 . . . 2 —

Ufficiale (Manuale per l') del Regio Esercito italiano, di U. MORINI, di pag. XX-388 . . . . . 3 50

Ufficiale sanitario (Manuale dell') di C. TONZIG e G. RUATA (In lavoro).

Unità assolute. Definizione, Dimensioni, Rappresentazione. Problemi dell'Ing. G. BERTOLINI, pag. X-124. . . . 2 50

Usciere — *vedi* Conciliatore.

Uva spina — *vedi* Frutta minori.

Uve da tavola. Varietà, coltivazione e commercio, del Dott. D. TAMARO, 3ª edizione, di pag. XVI-278, con tavole colorate, 7 fototipie e 57 incisioni . . . . . 4 —

Valli lombarde — *vedi* Dizionario alpino — Prealpi Bergamasche.

Valori pubblici (Manuale per l'apprezzamento dei), e per le operazioni di Borsa, del D. F. PICCINELLI, 2ª edizione rifatta e accresciuta, di pag. XXIV-902 . . . . . 7 50

Valutazioni — *vedi* Prontuario del ragioniere.

Vasellame antico — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e curiosità.

Veleni ed avvelenamenti, del Dott. C. FERRARIS, di pag. XVI-208, con 20 incisioni. 2 50

Velocipedi — *vedi* Ciclista.

Ventagli artistici — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.

Ventilazione — *vedi* Scaldamento.

Verbi greci anomali (I), del Prof. P. SPAGNOTTI, secondo le Grammatiche di CURTIUS e INAMA, pag. XXIV-107 . 1 50

Verbi latini di forma particolare nel perfetto e nel supino, di A. F. PAVANELLO, con indice alfabetico di dette forme, di pag. VI-215 . . . . . 1 50

Vermouth — *vedi* Liquorista.

Vernici (Fabbricazione delle), **e prodotti affini, lacche, mastici, inchiostri da stampa, ceralacche,** dell'Ing. UGO FORNARI, 2ª ediz. riveduta e ampliata di pag. XII-244 . 2 —

Vetri artistici — *vedi* Amatore oggetti d'arte — Specchi — Fotosmaltografia.

L. c.

Vetro (II). Fabbricazione, lavorazione meccanica, applicazioni alle costruzioni, alle arti ed alle industrie, dell'ing. G. D'ANGELO. di pag. XIX-527, con 325 figure intercalate, delle quali 25 in tricromia 9 50

Vini bianchi da pasto e Vini mezzo colore (Guida pratica per la fabbricazione, l'affinamento e la conservazione dei), di G. A. PRATO, di pag. XII-276, con 40 inc. . . . . 2 —

Vino (II), di G. GRASSI-SONCINI, di pag. XVI-152. . . . 2 —

Vino aromatizzato — *vedi* Cognac — Liquorista.

Viticoltura. Precetti ad uso dei Viticoltori italiani, del Prof. O. OTTAVI, 5ª ed. riveduta ed ampliata da A. STRUCCHI, di pag. XVI-227, con 30 incisioni . . . . . 2 —

Vocabolarietto pei numismatici (in 7 lingue), del Dott. S. AMBROSOLI, di pag. VIII-134 . . . . . 1 50

Vocabolario araldico ad uso degli italiani, del Conte G. GUELFI, di pag. VIII-294, con 356 incisioni 3 50

Vocabolario compendioso della lingua russa, del Prof. VOINOVICH, di pag. XVI-238 . . . . . 3 —

Vocabolario tipografico, di S. LANDI. (In lavoro).

Volapük (Dizionario italiano-volapük), preceduto dalle Nozioni compendiose di grammatica della lingua, del Prof. C. MATTEI, secondo i principii dell'inventore M. SCHLEYER, ed a norma del *Dizionario Volapúk* ad uso dei francesi, del Prof. KERCKHOFFS, di pag. XXX-198 . . . . . 2 50

Volapük (Dizion. volapük-ital.), Prof. C. MATTEI, p. XX-204. 2 50

Volapük, Manuale di conversazione e raccolta di vocaboli e dialoghi italiani-volapük, per cura di M. ROSA, TOMMASI e A. ZAMBELLI, di pag. 152. . . . . 2 50

Vulcanismo, del Cap. L. GATTA, di pag. VIII-268 e 28 inc. . 1 50

Zecche — *vedi* Terminologia monetaria.

Zolfo (Le miniere di) di G. CAGNI. di pag. XII-275, con 34 incisioni e 10 tabelle 3 50

Zoologia, dei Prof. E. H. GIGLIOLI e G. CAVANNA:

I. Invertebrati, di pag. 200, con 45 figure 1 50

II. Vertebrati, Parte I, Generalità, Ittiopsidi (Pesci ed Anfibi), di pag. XVI-156, con 33 incisioni . . . 1 50

III. Vertebrati. Parte II, Sauropsidi, Teriopsidi (Rettili, Uccelli e Mammiferi), di pag. XVI-200, con 22 incis.. 1 50

Zoonosi, del Dott. B. GALLI VALERIO, di pag. XV-227. . 1 50

Zootecnia, del Prof. G. TAMPELINI, p. VIII-297, 52 incis. 2 50

Zucchero (Industria dello):

I. *Coltivazione della barbabietola da zucchero*, dell'Ing. B. R. DEBARBIERI, di pag. XVI-220, con 12 inc.. . 2 50

II. *Commercio, importanza economica e legislazione doganale*, di L. FONTANA-RUSSO, di pag. XII-244 . 2 50

III. *Fabbricazione dello zucchero di barbabietola* dell'Ing. A. TACCANI, di pag. XII-228, con 71 incis . . 3 50

Indice alfabetico per autori dei Manuali Hoepli

(I numeri indicano le pagine).

Abbo P. Nuotatore 44
Acqua C. Microscopio 42
Adler G. Eserc. di lingua tedesca 28
Aducco A. Chimica agraria. . . 17
Agnelli G. Tav. Div. Commedia 54
Airy G. B. Gravitazione. 34
Alasia C. Eserc. Trigon. piana 28
— Complementi di geomet. elem. 20
— Geometria della sfera . . . 32
Alberti F. Il bestiame e l'agricol. 15
Albicini G. Diritto civile 23
Albini G. Fisiologia. 29
Alessandri P. E. Analisi chimica 11
— Analisi volumetrica 11
— Chimica applic. all'Igiene . 17
— Disinfezione 24
— Farmacista (Manuale del). 29
— Sostanze alimentari. 5
Allori A. Dizionario Eritreo . . 25
Aloi A. Olivo ed olio 44
— Agrumi 10
— Sofisticazione vino 52
Ambrosoli S. Atene. 14
— Monete greche 43
— Numismatica 44
— Vocabolarietto pei numism. 57
Antilli A. Disegno geometrico. 24
Antonini E. Pellagra 46
Appiani G. Colori e vernici . . 19
Arlia C. Dizionario bibliogr. . 25
Arrighi C. Dizionario milanese 25
Arti grafiche, ecc. 13
Aschieri F. Geom. anal. d. spazio 32
— Geometria anal. del piano 32
— Geometria descrittiva . . . 32
— Geom. projettiva del piano e della stella 32
Geom. projett. dello spazio 32
Azimonti E. Frumento 31
— Campicello scolastico 16
— Mais 40
Azzoni F. Debito pubb. italiano 23
Baccarini P. Malatt. crittogam. 40
Baddeley V. Law-Tennis 37
Bagnoli E. Statica 53
Bail J. Alpi (Le). 11
Bail R Stawell. Meccanica . . . 41
Ballerini O. Fiori artificiali . . 29
Balzani A. Shakespeare 51
Baroschi E. Fraseologia franc. 30
Barpi U. Igiene veterinaria . . 34
— Abitaz. degli anim. domest. 10
Barth M. Analisi del vino . . . 11
Bartoli A. Stilistica latina . . . 53
Bassi D. Mitologie orientali . . 43
Bastiani F. Lavori marittimi . 36
Belfiore G. Magnet. ed ipnot. . 40
Bellini A. Igiene della pelle. . 34
— Luce e salute, Fototerapia e radioterapia. 39
Bellio V. Mare (Il) 41
— Cristoforo Colombo 22
Bellotti G. Luce e colori 39
Belluomini G. Calderaio prat . 16
— Cubatura dei legnami . . . 22
— Fabbro ferraio 28
— Falegname ed ebanista . . 28
— Fonditore. 30
— Operaio (Manuale dell') . . 44
— Peso dei metalli 46
Beltrami L. Aless Manzoni . . 41
Benetti J. Meccanica 41
Bergamaschi O. Contabilità dom. 20
— Ragioneria industriale . . . 49
Bernardi G. Armonia 13
Bernhard. Infortunii di mont. . 36
Bertelli G. Disegno topografico 24
— Telemetria 54
Bertolini F. Risorg. italiano . . 50
Bertolini G. Unità assolute. . . 56
Bertolio S. Coltiv. delle min. . 42
Besta R. Anat. e fisiol. compar. 11
Bettel V. Morfologia greca. . . 43
Bettoni E. Piscicoltura. 46
Biagi G. Bibliotec. (Man. del). 15
Bianchi A. G. Trasporti e tariffe ferroviarie 55
Bignami-Sormani E. Dizionario alpino italiano 26
Biraghi G. Socialismo 51
Bisconti A. Esercizi greci . . . 28
Boccardini G. L'Euclide emendato 28
Bock C. Igiene privata 34
Boito C. Disegno (Princ. del) . 24
Bombicci C. Mineral. generale 42
— Mineralogia descrittiva. . . 42
Bonacini C. Fotografia ortocr. 30
Bonci E. Teoria delle ombre . 54
Bonelli L. Grammatica turca . 34
Bonetti E. Biancheria (Disegno, taglio, ecc.). 15
Bonino G. B. Dialetti greci. . . 23
Bonizzi P. Animali da cortile. 12
— Colombi domestici 19
Borgarello E. Gastronomia, Terminologia italiana e franc. 31
Borletti F. Celerimensura. . . . 17
— Form. per il calc. d. risvolte 30
Borsari L. Topog. di Roma ant. 55
Boselli E. Gioielleria e orefic. 32
Bossi L. M. Ostetricia. 45
Bragagnolo G. Storia di Francia 53

Bragagnolo G. Storia d'Inghilt. 53
Brigiuti L. Letterat. egiziana . 38
Brocherel G. Alpinismo 11
Brown H. T. Meccanismi (500) 41
Bruni F. Tartufi e funghi . . . 54
Bruni E. Catasto italiano. . . . 17
— Codice doganale italiano. . 18
— Contabilità dello Stato. . . 21
— Imposte dirette. 35
— Legislazione rurale 37
— Ricchezza mobile 49
Bruttini A. Il libro dell'agricol. 10
Bucci di Santafiora. Marino . . 41
— Flotte moderne (Le). 29
Budan E. Autografi (Amat. di). 14
Burali-Forti C. Logica matem. 39
Buttari F. Saggiatore (Man. d.) 50
— Tav. per l'allig. oro e arg. 54
Caffarelli F. Strumenti ad arco 53
Cagni G. Le miniere di zolfo. . 57
Calliano C. Soccorsi d'urgenza 51
— Assistenza degli infermi. . 13
Calzavara V. Industria del gas 31
Camperio M. Tigrè-italiano . . 55
Campi C. Campicello scolastico 16
Canestrini E. Fulmini e paraf. 31
Canestrini G. Apicoltura. 12
— Antropologia 12
Canestrini C. e R. Batteriologia 15
Cantamessa F. Alcool. 10
Cantoni C. Logica. 39
Cantoni C. Psicologia 48
Cantoni G Prato (Il). 47
— Tabacco (Il) 53
Cantoni P. Igroscopi, igrometri, umidita atmosferica. . . 35
Cantù C. Storia italiana 53
Capello F. Rettorica 49
— Stilistica 53
Capilupi A. Assicuraz. e stima 13
Capelletti L. Napoleone I. . . . 44
— Letterat. spagn. e portogh. 38
Cappelletti L. Nevrastenia . . . 44
Cappelli A. Diz. di abbreviat. . 25
Carazzi D. Ostricoltura 45
— Anat. microsc. (Tecn. di) . 11
Carega di Muricce. Agronomia 10
— Estimo rurale. 28
Carnevali T. Scienza finanze . 51
Carotti S. Storia dell'arte . . . 53
Carraroli A. Igiene rurale. . . . 34
Casagrandi V. Storia e cronol. 53
Casali A. Humus (L'). 34
Castellani L. Acetilene (L'). . . 10
— Incandescenza. 35
Castiglioni L. Beneficenza . . . 15
Cattaneo C. Dinamica element. 23
— Termodinamica 54
Cattaneo C. Terapia infanzia . 54
Cattaneo G. Embriolog. e morf. 27
Cavalieri D. Legisl. delle acque 37
Cavanna G. Zoologia 57
Cavara F. Funghi mangerecci. 31
Celoria G. Astronomia. 14
Cencelli-Perti A. Macch. agric. 39
Cerchiari G. L. Chiromanzia e tatuaggio 18
Cereti P. E. Esercizi latini. . . 28
Cerruti F. Meccanismi (500) . . 41
Cerutti A. Fognat. domestica . 30
Cettolini S. Malattie dei vini . 40
Ciapetti G. L'alcool industriale 10
Chiesa C. Logismografia 39
Ciampoli D. Letterature slave. 38
Cignoni A. Ingegnere navale . 36
Claudi C. Prospettiva 48
Clerico G. vedi Müller, Metrica 42
Collamarini G. Biologia 15
Colombo G. Ingegnere civile. . 36
Colombo L. Nutriz. del Bamb. 44
Comboni E. Analisi del vino. . 11
Concari T. Gramm. italiana . . 33
Consoli S. Fonologia latina . . 30
— Letteratura norvegiana . . 38
Conti P. Giardino infantile . . 32
Contuzzi F. P. Diritto costituz. 23
— Diritto internaz. privato. . 24
— Diritto internaz. pubblico. 24
Corsi E. Codice del bollo. . . . 18
Cossa A. Elettrochimica 26
Cossa L. Economia politica . . 26
Cougnet. Pugilato antico e mod. 48
Couillaux L. Igiene della bocca. 34
Cova E. Confez. abiti signora. 10
Cremona I. Alpi (Le) 11
Cristofoli L. Stenografo pratico 52
Crollalanza G. Araldica (Gr.). . 12
Croppi G. Canottaggio. 16
Crotti F. Compens. degli errori 20
Curti R. Infortuni della mont. 36
Cust R. Relig. e lingue d. India 49
— Lingue d'Africa 39
D'Adda L. Marine da guerra . 41
Dal Piaz. Cognac 19
Damiani Lingue straniere . . . 39
D'Angelo S. Vetro. 57
Da Ponte M. Distillazione . . . 24
De Amezaga. Marino militare . 41
De Barbieri R. Zucchero (Ind. d.) 57
De Brun A. Contab. comunale. 20
De Cillis E. Mosti (Densità dei) 44
De Gasparis A. Sale e Saline . 50
De Gregorio G. Glottologia. . . 33
De Gubernatis A. Lett. indiana 38
— Lingue d'Afr. 39
— Mitologia comparata 43

De Gubernatis A. Relig e lingue dell'India 49
Dell'Acqua F. Morte vera e appar. 43
Del Lupo M. Pomol. artificiale. 47
De Marchi L. Meteorologia. . . 42
— Climatologia. 18
De Mauri L. Maioliche (Amatore di) 40
— Amatore d'oggetti d'arte . 11
Dessy. Elettrotecnica 27
Di Maio F. Pirotecnica. 46
Dinaro S. Tornitore meccanico 56
— Montatore di macchine . . 43
— Atlante di macchine 39
Dizionario universale in 4 lingue 26
Dompè C. Man. del Commerciante 20
Dowden. Shakespeare 51
Doyen C. Litografia. 39
Enciclopedia Hoepli. 27
Erede G. Geometria pratica. . 32
Fabris G. Olii vegetali. 44
Fadda. Tempera e cementaz. . 54
Faelli F. Razze equine 49
Falcone C. Anat. topografica 12
Faralli G. Ig. della vita pub. e pr. 34
Fenini C. Letteratura italiana 38
Fenizia C. Evoluzione. 28
Ferrari D. Arte (L') del dire . . 13
Ferrari G. Scenografia (La) . . 50
Ferrari V. Lett. moderna ital. 38
— Letter. moderna e contemp. 38
Ferrario C. Curve circolari. . . 23
Ferraris C. Veleni ed avvelen. 56
Ferrini C. Digesto (Il) 23
— Diritto penale romano. . . 24
— Diritto romano 24
Ferrini R. Elettricità 26
— Energia fisica 27
— Galvanoplastica. 31
— Scaldamento e ventilaz. . . 50
— Telegrafia 54
Filippini P. Estimo dei terreni 28
Finzi J. Psichiatria 48
Fiorilli C. Omero 44
Fiori A. Dizionario tedesco . . 26
— Conversazione tedesca . . . 21
Fontana-Russo. Zucch. (Comm.) 57
Foresti A. Mitologia greca. . . 43
Formentano A. Giurisdizione volontaria 33
Formenti C. Alluminio 11
Fornari P. Sordomuto (Il) . . . 52
Fornari U. Vernici e lacche . . 56
— Luce e suono 39
— Calore (Il) 16
Foster M. Fisiologia 29
Franceschi G. Cacciatore 15
— Corse 22
Franceschi G Giuoco del Pallone 33
Franceschi G. B. Concia pelli . 20
— Conserve alimentari. 20
Franceschini F. Insetti utili . . 36
— Insetti nocivi 36
Franchi L. Codici 18-19
— Leggi sui lavori pubblici . 37
— Legge s. tasse di reg. e bollo 37
— Legge sull'Ordin. giudiz. . 37
— Legge sanità e sicur. pubbl. 37
— Leggi sulle privat. industr. 37
— Leggi diritti d'autore 18-19-37
Friedmann S. Lingua gotica . . 38
Friso L. Filosofia morale. . . . 29
Frisoni G. Gramm. port.-bras. 34
— Corrispondenza italiana. . 21
— » spagnuola 22
— » francese . . 22
— Gramm. Danese-Norveg. . . 33
Fumagalli G. Bibliotecario . . . 15
— Paleografia. 45
Fumi F. G. Sanscrito. 50
Funaro A. Concimi (I) 20
Gabba L. Chimico (Man. del) 17.
— Seta (Industria della). . . . 51
— Adult. e falsific. degli alim. 10
Gabbi U. Semeiotica 51
Gabelsberger-Noë. Stenografia. 52
Gabrielli F. Giuochi ginnastici 33
Gagliardi E. Interesse e sconto 36
— Ragioniere Pront. del). . . 49
Galassini A. Macc. cuc. e ricam. 40
Gallerani G. Spettrofotometria 52
Galletti E. Geografia. 31
Galli G. Igiene privata 34
Galli Valerio B. Zoonosi 57
— Immunità e resist. alle mal. 35
Gallizia P. Resistenza dei mater. 49
Gardenghi G. Soc. di mutuo soc.. 51
Garetti A. Notaio (Man. del). . 44
Gardini A. Chirurgia operat . . 18
Garibaldi C. Econ. matematica 26
Garnier-Valletti Pomologia . . . 47
Garollo G. Atl. geog.-st. d'Ital. 14
— Dizionario biograf. univ. . 25
— Dizionario geograf. univ. . 25
— Prontuario di geografia . . 48
Garuffa E. Orologeria 45
— Siderurgia 51
Gaslini A. Prodotti del Tropico 47
Gatta L. Sismologia 51
— Vulcanismo 57
Gautero G. Macch. e fuochista . 40
Gavina F. Ballo (Manuale del). 14
Geikie A. Geografia fisica. . . . 32
— Geologia 32
Gelcich E. Cartografia. 17
— Ottica 45

Gelli J. Armi antiche 13
— Biliardo 15
— Codice cavalleresco 18
— Dizionario filatelico 25
— Duellante 26
— Ginnastica maschile 32
— Scherma 51
— Il raccoglitore 48
Gentile I. Archeologia dell'arte 12
— Geografia classica 27
— Storia antica (Oriente) . . . 53
Gernesio G. Imitaz. di Cristo . 35
Gestro R. Natural. viaggiat. . . 44
— Naturalista preparatore . . 44
Ghersi I. Ciclista 18
— Conti fatti 21
— Galvanostegia 31
— Imitazioni e succedanei . . 35
— Industrie (Piccole) 35
— Leghe metalliche 37
— Metallocromia 42
— Monete, pesi e mis. ingl. . 43
— Problemi di geometria . . . 47
— Ricettario domestico 49
— Ricettario industriale 49
Gibelli G. Idroterapia 34
Giglioli E. H. Zoologia 57
Gioppi L. Crittografia 22
— Dizionario fotografico . . . 25
— Fotografia industriale . . . 30
Giordani G. Proprietario di case 48
Giorgetti S. Stenografia 52
Giorli E. Disegno industriale . 24
— Disegno e costruz. Nave. . 24
— Aritmetica e Geometria . . 13
— Meccanico (Il) 41
— Meccanica (La) del macchinista di bordo 41
Gitt: V. Computisteria 20
— Ragioneria 48
Giudici O. Tessuti di lana e cot. 55
Gladstone W. E. Omero 44
Gnecchi F. Monete romane . . . 43
— Guida numismatica 34
Gobbi U. Assicuraz. generale . 13
Goffi V. Disegnat. meccanico . 24
Gorini G. Colori e vernici . . . 19
— Concia delle pelli 20
— Conserve alimentari 20
— Metalli preziosi 42
— Olii 44
— Piante industriali 45
— Pietre preziose 45
Gorra E. Lingue neo-latine . . 39
— Morfologia italiana 43
Grawinkel, Elettrotecnica 27
Grassi F. Magnetismo e elett. 40
Grazzi-Soncini G. Vino (Il) . . . 57
Griffini A. Coleotteri italiani . . 19
— Ittiologia italiana 36
— Lepidotteri italiani 37
— Imenotteri italiani 35
Grothe E. Filatura, tessitura . . 29
Grove G. Geografia 31
Gualta L. Colori e la pittura . 19
Guasti C. Imitazione di Cristo 35
Guelfi G. Vocabolario araldico 57
Guetta P. Il Canto 16
Guyon B. Grammatica Slovena 34
Haeder H. Costr. macc. a vap. . 39
Hoepli U. Enciclopedia 27
Hooker I. Botanica 15
Hubert I. C. Antich. pubbl. rom. 12
Hugues L. Esercizi geografici . 27
— Cronologia scop. geogr. . . 22
Imitazione di Cristo 35
Imperato F. Attrezz. delle navi 14
Inama V. Antichità greche . . . 12
— Letteratura greca 38
— Grammatica greca 33
— Filologia classica 29
— Florilegio poetico 29
— Esercizi greci 28
Issel A Naturalista viaggiat. . 44
Jacoangeli O. Triangol. topog. . 55
Jenkin F. Elettricità 26
Jevons W. Stanley. Econ. polit. 26
— Logica 39
Jona E. Cavi telegr. sottomar. 17
Jones E. Calore (Il) 16
— Luce e suono 39
Kiepert R. Atl. geogr. univers. 14
— Esercizi geografici 27
Kopp W. Antich. priv. dei Rom. 12
La Leta B. M. Cosmografia . . . 22
— Gnomonica 33
Landi D. Dis. di proiez. ortog. 24
Landi S. Tipografia (I°) Guida 55
— (II°) Compositore-tipogr. . 55
— Vocabolario tipografico . . 57
Lange O. Letteratura tedesca . 38
Lanzoni P. Geogr. comm. econ. 32
Larice R. Storia del commercio 20
Leoni B. Lavori in terra 37
Lepetit R. Tintore 55
Levi C. Fabbricati civ. di abitaz. 28
Levi C. Letterat. drammatica . 38
Levi I. Gramm. lingua ebraica . 33
Librandi V. Gramm. albanese . 33
Licciardelli G. Coniglicoltura . 20
Licò N. Protez. degli animali . 48
Lignarolo M. Doveri del macch . 26
— Macchinista navale 40
Lion A. Ingegneria legale . . . 36
Lioy P. Ditteri italiani 25
Livi L. Antropometria 12

Lockyer I. N. Astronomia. . .. 13
Lombardini A. Anat. pittorica. 12
Lombroso C. Grafologia. 33
Lomonaco A. Igiene della vista 34
Loria L. Macchinista e fuochis. 40
Loris. Diritto amministrativo. 23
— Diritto civile 23
Lovera R. Gramm. greca mod. . 83
— Grammatica rumena 34
Luxardo O. Merceologia. 42
Maffioli D. Diritti e dov. dei citt. 23
— Scritture d'affari. 51
Maggi L. Protistologia 48
— Tecnica protistologica . . . 54
Magrini E. Infortuni sul lavoro 36
— Case operaie. 17
Maimardi G. Esattore. 27
Majnoni R. Massaggio. 41
Malacrida G. Materia medica . 41
— Impiego ipodermico e la dosatura dei rimedi 35
Malfatti B. Etnografia 28
Mancini P. La rachitide. 48
Manetti L. Caseificio 17
Mantovani G. Psicolog. fisiolog. 48
Marazza E. Stearineria 52
— Saponi (Industria dei) . . . 50
Marcel C. Lingue straniere . . 39
Marchi E. Maiale (Il). 40
Marcillac F. Letterat. francese 38
Marro A. Corr. elettr. alternate 21
Marzorati E. Codice perito mis. 18
Mastrigli L. Cantante 16
— Pianista. 46
Mattei C. Volapük (Dizion.) . . 57
Mazzocchi L. Calci e cementi . 16
— Cod. d. perito misuratore. 18
Mazzoccolo E. Legge comunale 37
Melani A. Architett. italiana . 12
— Decoraz. e industrie artist. 23
— Ornatista 45
— Pittura italiana. 46
— Scultura italiana 51
Melli B. L'Eritrea 27
Menozzi. Alimentaz. bestiame 11
Mercanti F. Animali parassiti . 12
Mezzanotti C. Bonifiche 15
Mina G. Modellat. meccanico . 43
Minozzi A. Fosfati 30
Minutti R. Letterat. tedesca . . 38
— Traduttore tedesco 55
Molina E. Antologia stenografica 12
Molina. Curatore dei fallimenti 22
Molina R. Esplodenti. 28
Molon G. Pomologia 47
Mondini. Produzione dei vini . 48
Montagna A. Fotosmaltografia 30
Montemartini L. Fisiol. veget. . 29
Moreschi N. Antichità private dei Romani 12
Morgana G. Gramm. olandese. 33
Morini U. Uffic. (Man. per l') . 56
Morselli E. Sociologia generale 52
Motta G. Telefono 54
Muffone G. Fotografia 30
Müller L. Metrica Greci e Rom. 42
Müller O. Logaritmi 39
Murani O. Fisica. 29
— Telegrafia senza fili. 54
Murari R. Ritmica. 50
Musatti E. Leggende popolari. 37
Muzio C. Medico pratico 41
— Malattie dei paesi caldi . . 40
Naccari G. Astronomia nautica 14
Nallino A. Arabo parlato 12
Namias R. Fabbr. degli specchi 52
— Processi fotomeccanici. . . 47
Nazari O. Dialetti italici 23
Negrin C. Paga giornaliera. . . 45
Nenci T. Bachi da seta 14
Niccoli V. Alimentaz. bestiame 11
— Cooperative rurali. 21
— Costruzione ed economia dei fabbricati rurali 28
— Prontuario dell'agricoltore. 10
Nicoletti A Stenogaafia 52
— Esercizi di stenografia. . . 52
Noseda E. Legislaz. sanitaria 37
— Lavoro delle donne e fanc. 37
Nuyens A. Diz. italiano-oland. 25
Olivari G. Filonauta 29
Olmo C. Dirito ecclesiastico. . 23
Orlandi G. Celerimensura. . . . 17
Orsi P. Storia d'Italia. 53
Orsini E. Scacchi 50
Ostwald-Bolis. Chimica analitica 17
Ottavi O. Enologia 27
— Viticoltura. 57
Ottino G. Bibliografia. 15
Pagani C. Assicuraz. sulla vita 13
Paganini A. Letterat. francese 38
Paganini P. Fotogrammetria. . 30
Palombi A. Manuale postale . . 47
Palumbo R. Omero 44
Panizza F. Aritmetica razion. 13
— Aritmetica pratica, ... 13
— Esercizi di Aritmetica raz. 13
Paoloni P. Disegno assonom. . 24
Pappalardo A. Spiritismo. . . . 52
— Telepatia. 54
Parise P. Ortofrenia. 45
Paroli E. Grammatica svedese 34
Pascal T. Tintura della seta . 55
Pascal E. Calcolo differenziale 16
— Calcolo integrale. 16
— Calcolo delle variazioni . . 16

Pascal E. Esercizi di calcolo . 16
— Determinanti 23
— Funzioni ellittiche 31
— Gruppi di trasformazioni . . 34
— Matematiche superiori . . . 41
Pattacini G. Conciliatore 20
Pavanello F A. Verbi latini . . 56
Pavia L. Grammatica tedesca. 34
— Grammatica inglese. 33
— Grammatica spagnuola . . 34
Pavolini E. Buddismo 15
Pedicino N. A. Botanica 15
Pedretti G. Automobilista (L'). 14
Pedrini. Casa dell'avvenire . . 17
Peglion V. Filossera 29
Perassi T. G. Sintassi latina. . 51
Percossi R. Calligrafia. 16
Perdoni T. Idraulica 34
Petri L. Computisteria agraria 20
Petzholdt. Bibliotecario 15
Piazzoli E. Illuminaz. elettrica 35
Piccinelli F. Società Ind. p. az. 51
— Valori pubblici 56
Piccinini P. Farmacoterapia . . 29
Piccoli D. V. Telefono 54
Pieraccini A. Assist. dei pazzi 13
Pilo M. Estetica. 28
— Psicologia musicale. 48
Pincherle S. Algebra element. 11
— Algebra complementare . . 10
— Esercizi di algebra elem. . 11
— Esercizi di geometria. . . . 27
— Geometr. metr. e trigonometria 32
— Geometria pura. 32
Pinchetti P. Tessitore 54
Pini P. Epilessia 27
Pisani A. Mandolinista 41
— Chitarra 18
Pizzini L. Disinfezione 24
— Microbiologia 42
Pizzi I. Letteratura persiana . 38
— Islamismo 36
— Letteratura araba 37
Plebani B. Arte della memoria 13
Polacco L. Tav. Div. Comm. . 54
Poloni G. Magnet. ed elettricità 40
Pompilio. Panificazione 46
Porro F. Spettroscopio 52
— Gravitazione. 34
Portiglioti G. Psicoterapia . . . 48
Pozzi G. Regolo calcolatore . . 49
Prat G. Grammatica francese. 33
— Esercizi di traduzione . . . 28
Prato G. Cognac. 19
— Vini bianchi 57
Proctor R. A. Spettroscopio . . 52
Prout E. Strumentazione 53
Pucci A. Frutta minori 31
— Piante e fiori 46
Rabbeno A. Mezzeria. 42
— Ipoteche (Manuale per le) 36
Racioppi F. Ordinamento degli Stati liberi d'Europa. 45
— Idem, fuori d'Europa 45
Raina M. Logaritmi 39
Ramorino F. Letterat. romana. 38
— Mitologia (Dizionario di) . 43
Rebuschini E. Mal. del sangue. 40
— Organoterapia. 45
— Sieroterapia 51
Regazzoni J. Paleoetnologia . . 45
Repossi A. Igiene scolastica. . 34
Restori A. Letterat. provenzale 38
— Letteratura catalana 37
Revel A. Letteratura ebraica . 38
Ricci A. Marmista 41
Ricci E. Chimica 17
Ricci S. Epigrafia latina 27
— Archeologia. Arte greca . . 12
— „ Arte etr. e rom. 12
Ricci V. Strumentazione 53
Righetti E Asfalto 13
Rivelli A. Stereometria 52
Roda F lli. Floricoltura 29
Rodari D. Sintassi francese . . . 51
— Esercizi relat. a sintassi . . 51
Romanelli-M. G. Trine al fusello 56
Ronchetti G. Pittura per dilett. 46
— Grammatica d. disegno . . 24
Roscoe H. E. Chimica 17
Rossetto V. Arte militare. . . . 53
— Avarie e sinistri marittimi 14
Rossi A. Liquorista. 39
— Profumiere. 48
Rossi G. Costruttore navale . . 22
Rossotti M. A. Formul. di matem. 30
Rota G. Ragioneria delle cooperative di consumo 49
— Contabilità (v. Beneficenza) 15
Ruata G. Ufficiale sanitario . . 56
Saccheri P. G. L'Euclide emendato 28
Sacchetti G. Tecnologia e terminologia monetaria. 54
Salvatore A. Infort. sul lavoro 37
Sanarelli. Igiene del lavoro . . 34
Sansoni F. Cristallografia. . . . 22
Santi B. Diz. dei Comuni ital. 25
Santilli. Selvicoltura 51
Sanvisenti B. Letteratura spag. 38
Sartori G. Latte, burro e cacio 36
— Caseificio. 17
Sartori L. Carta (Industr. della) 17
Sassi L. Carte fotografiche . . 17
— Ricettario fotografico . . . 50
— Fotocromatografia. 30

Sassi L. Proiezioni (Le). 48
Savorgnan. Coltiv.d. piante tess. 46
Scarpis U. Teoria dei numeri. 54
Scartazzini G. A. Dantologia. . 23
Schenck E. Resist. travi metal. 43
Schiaparelli G. V. L'astronomia n. antico testamento. 14
Schiavenato A. Diz. stenogr. . 25
Scolari C. Dizionario alpino. . 25
Secco-Suardo. Ristau. dipinti . 50
Seghieri A. Scacchi. 50
Sella A. Fisica cristallografica 29
Serina L. Testamenti 55
Sernagiotto R. Enol. domestica 27
Sessa G. Dottrina popolare . . 26
Setti A. Man. del Giurato . . . 33
Severi A. Monogrammi 43
Siber-Millot C. Molini (Ind. dei) 43
Solazzi E. Letteratura inglese. 38
Soldani G. Agronom. moderna 10
Solerio G. P. Rivoluz. francese 50
Soli G. Didattica 23
Spagnotti P. Verbi greci 56
Spataro D. Fognat. cittadina . 30
Stecchi R. Chirurgia operat. . 18
Stoppani A. Geografia fisica. 32
— Geologia 32
— Prealpi bergamasche 47
Stoppato A. Diritto penale . . . 24
Stoppato L. Fonologia italiana 30
Strafforello G. Alimentazione . 11
— Errori e pregiudizi 27
— Letteratura americana . . . 37
Straticò A. Letterat. albanese. 37
Streker. Elettrotecnica 27
Strucchi A. Cantiniere. 16
— Enologia 27
— Viticoltura 57
Supino R. Chimica clinica . . . 17
Tabanelli N. Codice del teatro 19
Taccani A. Zucchero (Fabbr. d.) 57
Tacchini A. Metrologia 42
Tamaro D. Frutticoltura 31
— Gelsicoltura 31
— Orticoltura. 45
— Uve da tavola. 56
Tami F. Nautica stimata. . . . 44
Tampellini G. Zootecnia 57
Taramelli A. Prealpi bergamas. 47
Teloni B. Letteratura assira. . 38
Thompson E. M. Paleografia . . 45
Tioli L. Acque minerali e cure 10
Tognini A. Anatomia vegetale. 12
Tolesani D. Enimmistica 27
Tommasi M. R. Convers. volapük 57
Toniazzo G. St. ant. (La Grecia) 53
Tonta I. Raggi Röntgen . , . . 50
Tonzig C. Ufficiale sanitario. . 56
Tozer H. F. Geografia classica. 32
Trabalza C. Insegn. dell'italiano 36
Trambusti A. Igiene del lavoro 47
Trasporti e tariffe ferroviarie . . 55
Trevisani G. Pollicoltura 47
Triboiati F. Araldica (Gramm.) 12
Triconi E. Medicat. antisettica 41
Trivero C. Classific. d. scienze 18
Ulivi P. Industria frigorifera. 35
Untersteiner A. Storia musica. 53
Untersteiner L. Uccelli canori. 56
Vacchelli G. Calcestruzzo 16
Valenti A. Aromatici e nervini 13
Valentini N. Chimica legale . . 17
Valletti F. Ginnast. femminile. 32
— Ginnastica (Storia della). . 32
Valmaggi L. Gramm. latina. . . 33
Vanbianchi C. Autografi. 14
Vecchio A. Cane (Il) 16
Vender V. Acido solforico, ecc. 10
Venturoli G. Concia pelli 20
— Conserve alimentari 20
Vidari E. Diritto commerciale. 23
— Mandato commerciale . . . 40
Vidari G. Etica. 28
Villani F. Prodotti della distillazione del legno 24
Vinassa P. Paleontologia. . . . 45
Virgilii F. Cooperazione 21
— Economia matematica . . . 25
— Statistica. 52
Viterbo E. Grammatica e dizion. Galla (Oromonica). . . 33
Vitta C Giustizia amministr. . 33
Vivanti G. Funzioni analitiche 31
— Comp. matematica 41
Voigt W. Fisica cristallograf. . 29
Voinovich. Grammatica russa . 34
— Vocabolario russo 57
Volpini C. Cavallo. 17
— Proverbi sul cavallo 48
Webber E. Macchine a vapore 39
— Dizionario tecnico italiano-tedesco-francese-inglese. . . 26
Werth F. Galvanizzazione . . . 31
Will. Tav. analit. (v. Chimico) . 17
Wittgens A. Antic. pubbl. rom. 12
Wolf R. Malattie crittogam. . . 40
Zambelli A. Manuale di conversaz. italiano-volapük . . 57
Zambler A. Medicat. antisett. . 41
Zampini G. Bibbia (Man. della) 15
— Imitazione di cristo. 35
Zigány-Arpád. Lett. ungherese. 38
Zoppetti V. Arte mineraria. 13-42
— Siderurgia 51
Zubiani A. Tisici e sanatorii . 55
Zucca A. Acrobatica e atletica 10